

Repetisjon, 1. Ordens differensialligninger

Vi har i kap. 2.3 sett på utledning av en del enkle matematiske modeller som ledet til differensiallikninger. Den enkleste differensiallikning vi skal få å gjøre med er en første ordens ordinær differensiallikning. En slik vil kunne ha formen

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.25)$$

Dersom funksjonen $f(\cdot)$ er lineær med hensyn til x og u ,
altså

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)u \quad (2.26)$$

refererer vi til differensiallikningen som lineær, drevet og
tidsvariant.

Dersom koeffisientene a og b er konstante, vil likningen
anta formen

$$\dot{x} = ax + bu \quad (2.27)$$

og likningen refereres da til som lineær, drevet og tidsinvariant.

Løsningen til denne likning finnes som kjent ved først å finne løsningen til den homogene (autonome) likning (2.29). Denne vet vi er

$$x_h(t) = c e^{a(t-t_0)} \quad (2.30)$$

der c er en konstant avhengig av begynnelsesbetingelsen x_0 . Løsningen av den inhomogene (drevne) likning (2.27) kan finnes ved å anta at c er en funksjon av tiden, altså

$$x(t) = c(t)e^{a(t-t_0)} \quad (2.31)$$

Vi kan nå bestemme funksjonen $c(t)$ ved derivasjon av (2.31) og sammenlikning med (2.27). Derivasjon av (2.31) gir

$$\dot{x}(t) = \dot{c}(t)e^{a(t-t_0)} + ac(t)e^{a(t-t_0)} \quad (2.32)$$

mens innsetning av (2.31) i (2.27) gir

$$\dot{x}(t) = ac(t)e^{a(t-t_0)} + bu \quad (2.33)$$

Sammenlikning av de to siste likningene gir

$$\dot{c}(t) = e^{-a(t-t_0)} bu \quad (2.34)$$

$c(t)$ finnes ved integrasjon av (2.34)

$$c(t) = c_0 + \int_{t_0}^t e^{-a(\tau-t_0)} bu(\tau) d\tau \quad (2.35)$$

Innsetting av (2.35) i (2.31) gir da

$$x(t) = c_0 e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (2.36)$$

Setter vi i (2.36) $t = t_0$, finner vi $c_0 = x_0$ slik at den endelige løsning blir

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (2.37)$$

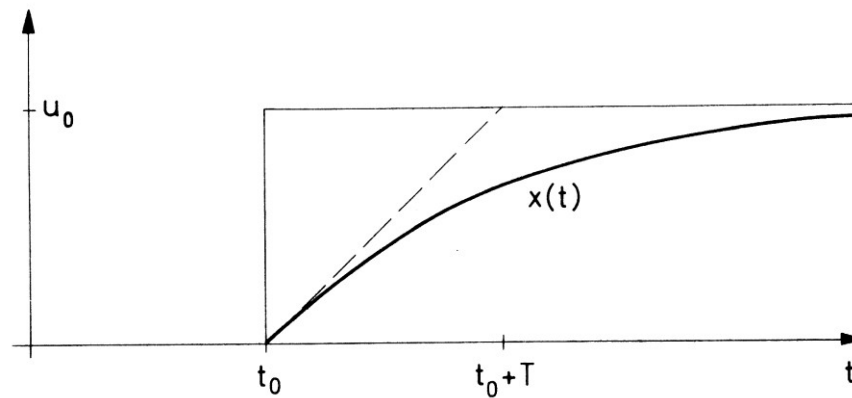
Første ledd i (2.37) ser vi er løsningen av den homogene likning. I det andre leddet inngår den ytre drivfunksjon $u(t)$ og vi ser at dette leddet har formen av et foldningsintegral. Løsningen i (2.37) er meget viktig og skal få stor betydning for det videre arbeidet. Den skal også generaliseres til å omfatte løsning av et sett av lineære, koplete, førsteordens differensiallikninger.

Eksempel 1. Ordens enkel differensialfunksjon

Et særdeles viktig spesialtilfelle får vi dersom $u(t)$ er en tidsfunksjon som undergår et sprang fra null til u_0 ved $t = t_0$ og dersom $x_0 = 0$. Vi får da ved bruk av (2.37)

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_{t_0}^t e^{-\frac{t-\tau}{T}} \frac{1}{T} u_0 d\tau \\ &= u_0 \left[1 - e^{-\frac{t-t_0}{T}} \right]\end{aligned}\tag{2.39}$$

En skisse av denne løsning er vist i fig. 2.7 der den gradvise oppbygging, karakterisert ved tidskonstanten T av spenningen $x(t)$ fra null mot u_0 , tydelig fremgår.



En høyere ordens differensialligning
kan omformes til et sett av første ordens
differensialligninger

Vi har i kap. 2.3 sett på utledning av en del enkle matematiske modeller som ledet til differensiallikninger. Den enkleste differensiallikning vi skal få å gjøre med er en første ordens ordinær differensiallikning. En slik vil kunne ha formen

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.25)$$

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, u, t) \quad (2.44)$$

Vi skal bare i liten grad interessere oss for løsning av høyereordens differensiallikninger fordi vi skal finne det mer hensiktsmessig å omgjøre dem til sett av førsteordens differensiallikninger. Imidlertid vil det være mulig ved hjelp av Laplace-transformasjonen å løse høyereordens differensiallikninger direkte. Dette vil bli gjort i kap. 4.

Vi innfører i (2.44)

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ \dot{x} &= x_2 = \dot{x}_1 \\ \ddot{x} &= x_3 = \dot{x}_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x^{(n-1)} &= x_n = \dot{x}_{n-1} \end{aligned}$$

Da kan vi formulere følgende sett av komplette førsteordens differensiallikninger

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

.

.

(2.45)

$$\dot{x}_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u, t)$$

3.2.1 Tilstandsvektor. Tilstandsrom

Vi har i kap. 2 kommet frem til at dynamiske systemer kan beskrives med et sett av koplete førsteordens differensiallikninger, og vi kan nå benytte oss av vektor- og matrisenotasjon til å formulere slike likninger. Generelt har vi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ &\cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ &\cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t)\end{aligned}\tag{3.25}$$

som med vektornotasjon kan skrives

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (3.26)$$

\underline{u} er her en vektor med dimensjon r som inneholder de variable som påvirker systemet utenfra. Hvis differensiallikningene i (3.25) er lineære med konstante koeffisienter vil (3.26) kunne anta formen

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \quad (3.27)$$

der A og B er konstante matriser.

Parametre?

En vil sjelden finne at store fysiske prosesser er lineære, men en vil ofte kunne linearisere for små variasjoner omkring et arbeidspunkt. Ved Taylor-rekkeutvikling av funksjonene i (3.25) vil en da finne

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\} \quad (3.28)$$

Tilsvarende uttrykk for B kan finnes når en kjenner hvordan \underline{u} inngår i funksjonen i (3.26).

Vektoren \underline{x} kalles tilstandsvektoren og dens elementer kalles tilstandsvariable. Det vektorrom som utspennes av tilstandsvektoren kalles tilstandsrommet.

3.2.4 Valg av tilstandsvariable

Det har i forrige kapittel blitt påpekt at valg av tilstandsvariable ved beskrivelse av dynamiske systemer ikke er entydig. For lineære systemer med konstante koeffisienter gjelder det at hvilken som helst lineær, ikke-singulær transformasjon av en tilstandsvektor gir en ny mulig tilstandsvektor. Som oftest ønsker en nok å velge de matematiske tilstandsvariable lik iøynefallende fysiske tilstandsvariable ved oppsetting av de matematiske modeller for eventuelt siden å foreta transformasjoner.

Den generelle matematiske modell for et dynamisk system som kan beskrives med ordinære, lineære differensiallikninger med konstante koeffisienter er

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + C\underline{v}$$

(3.62)

$$\underline{y} = D\underline{x} + \underline{w}$$

der \underline{x} og \underline{u} er henholdsvis tilstands- og pådragsvektor mens \underline{v} er en vektor av ytre forstyrrelser, \underline{y} er en vektor av de målevariable og \underline{w} er en vektor av støy (usikkerhet) på målingene. De forskjellige matrisene gis følgende betegnelser

A = systemmatrise

B = pådragsmatrise

C = forstyrrelsesmatrise

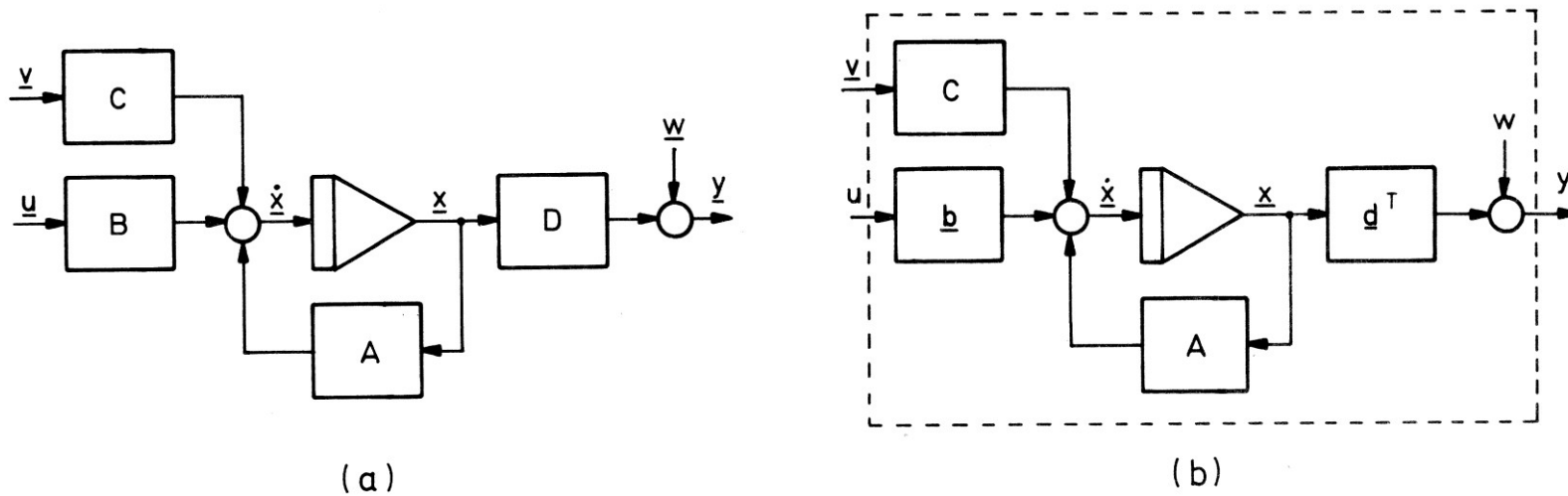
D = målematrise

3.2.5 Monovariabel og multivariabel systemer. Blokkdiagrammer

Et dynamisk system sies å være multivariabelt når det utsettes for flere uavhengige påvirkninger (elementene i \underline{u} og eventuelt \underline{v}) og når det observeres gjennom flere målinger (elementene i \underline{y}). Hvor mange tilstandsvariable som finnes (ordenstall av differensiallikninger), spiller ingen rolle i denne forbindelse. Vi kan altså gjerne ha et multivariabelt system som er av første orden. Et monovariabelt system er et spesialtilfelle av et multivariabelt system som fremkommer når det bare finnes én påvirkning ($u = \text{skalar}$) og én måling ($y = \text{skalar}$). Mange multivariabel systemer kan med god tilnærming betraktes som et antall monovariabel systemer dersom det ikke finnes noen vesentlig kopling mellom de forskjellige systemdeler. Tar vi utgangspunkt i den matematiske modell for et multivariabelt system i (3.62), avleder vi av dette beskrivelsen av et monovariabelt system

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u + \underline{C}\underline{v} \\ \underline{y} &= \underline{d}^T \underline{x} + w\end{aligned}\tag{3.71}$$

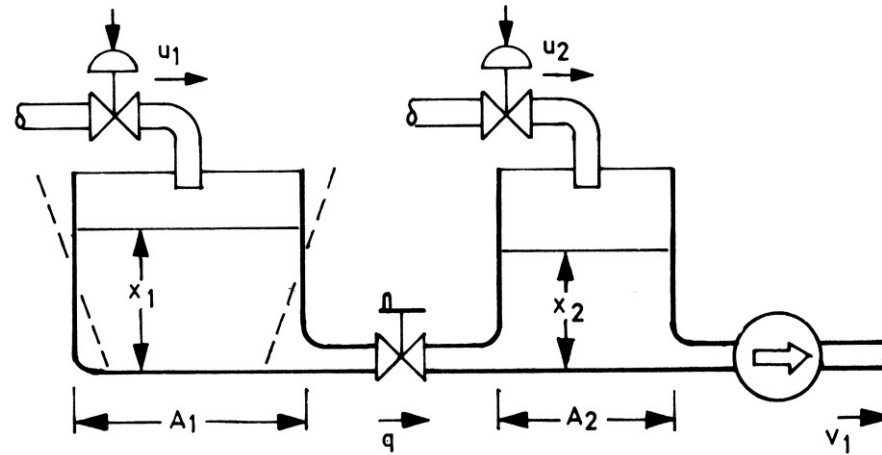
der det på grunn av at u og y i dette tilfellet er skalare størrelser er innført at



Figur 3.7

I fig. 3.7 b ser vi hvordan blokkdiagrammet blir for det monovariabelt system og tenker vi oss for enkelhets skyld at $\underline{v} = \underline{0}$, har vi innenfor den stiplede kontur et system som påvirkes av en variabel u til venstre og gir en respons y til høyre som resultat av kanskje et stort antall tilstandsvariable \underline{x} imellom.

Eksempel 1, Koblede tanker



Figur 2.2

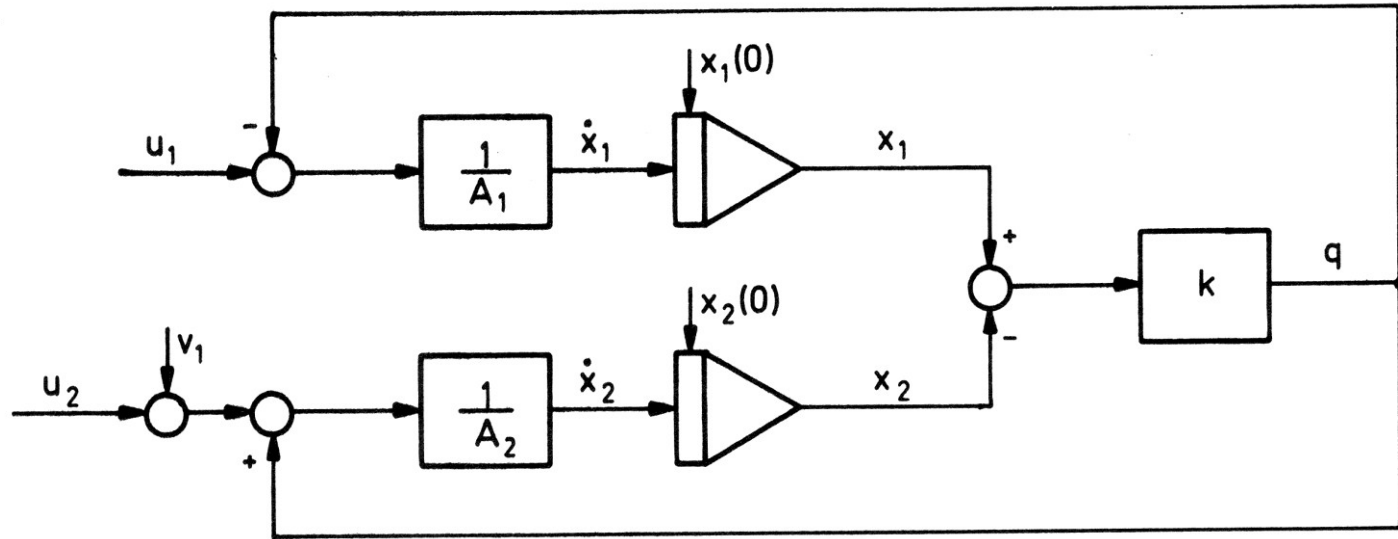
stoffmengde som akkumuleres i venstre kar pr. tidsenhet må være

$$A_1 \frac{dx_1}{dt}$$

Stoffbalansen for venstre kar gir da

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{A_1}(u_1 - q) \quad (2.9)$$

I fig. 2.2 er vist et enkelt hydraulisk system der to kar som kommuniserer gjennom en ventil (væskestrøm q) tilføres hver for seg uavhengige væskestrømmer (u_1 og u_2) og der det fra karet til høyre ved hjelp av en pumpe bortføres en væskestrøm (v_1). For dette system kan vi sette opp en stoffbalanse for hvert av de to karene der vi benytter oss av det enkle forhold at summen av de væskemengder som tilføres, bortføres og akkumuleres må være lik null. Dette kan selvsagt også uttrykkes på følgende måte: Differansen mellom det som tilføres og det som bortføres er lik det som akkumuleres. Antar vi først at de to karene er sylindriske med grunnflate henholdsvis A_1 og A_2 , og når nivåene i de to karene betegnes med henholdsvis x_1 og x_2 , finner vi at den



For høyre kar finner vi tilsvarende

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{A_2}(u_2 + q - v_1) \quad (2.10)$$

Vi legger merke til at den væskestrøm som bortføres fra det venstre karet tilføres det høyre. Dersom et eller begge av kar-ene ikke er sylindriske som forutsatt, men f.eks. koniske som antydnet i de stiplede linjer i det venstre karet, vil arealet A_1 ikke lenger være konstant, men en funksjon av x_1 . Dette vil medføre at problemet går over fra å være et lineært til å bli et ulineært problem.

Væskestrømmen som utveksles mellom de to karene (q) er et resultat av den hydrostatiske trykkdifferans som oppstår på grunn

av en nivå-forskjell mellom de to karene. Vi vil derfor ha at væskestrømmen er en funksjon av differansen mellom de to nivåer. På basis av elementær hydrodynamikk vet vi at sammenhengen mellom væskestrøm og trykkfall med god tilnærming kan skrives

$$q = \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) k_0 \sqrt{|x_1 - x_2|} \quad (2.11)$$

Dette er en ulineær relasjon der parameteren k_0 er bestemt av ventilåpning, rørdimensjoner o.l. Med en viss rimelighet kan den tilnærmes med følgende lineære sammenheng

$$q \approx k_1 (x_1 - x_2) \quad (2.12)$$

Benytter vi (2.12) i (2.9) og (2.10) finner vi

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{A_1}(-k_1x_1 + k_1x_2 + u_1) \quad (2.13)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{A_2}(k_1x_1 - k_1x_2 + u_2 - v_1) \quad (2.14)$$

Vi ser at vi også her er kommet frem til to første ordens differensiallikninger som er koplete fordi de avhengig variable forekommer i begge likninger. Hvordan disse likninger kan løses skal behandles i senere avsnitt.

(2.9) og (2.10) var uttrykk for stoffbalanse i de to karene mens (2.11) i virkeligheten er et uttrykk for kraftbalanse (trykkbalanse over forbindelsesrøret). Vi har derfor her et eksempel
▲ på forekomsten av to typer fysiske balanser i samme system.

$$a_{11} = -\frac{g_1}{m_1 c_1}, \quad a_{12} = \frac{g_1}{m_1 c_1} = -a_{11}$$

$$a_{21} = \frac{g_1}{m_2 c_2}, \quad a_{22} = \frac{1}{m_2 c_2} (-g_1 - q\rho c_2 - g_2)$$

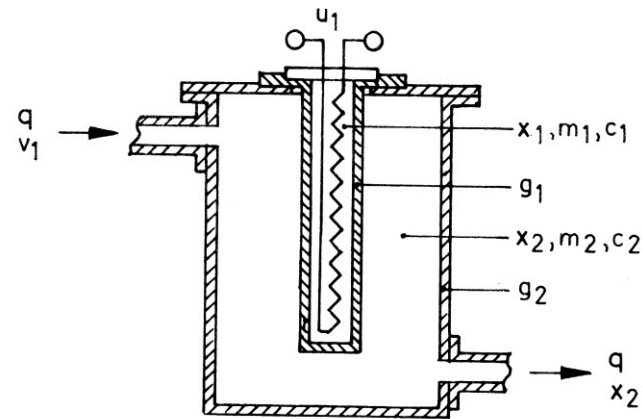
$$b_{11} = \frac{1}{m_1 c_1}, \quad c_{21} = \frac{q\rho}{m_2}, \quad c_{22} = \frac{g_2}{m_2 c_2}$$

(2.17) og (2.18) viser at vi også for dette system har fått to komplette første ordens differensiallikninger av en type som vi
 ▲ senere skal møte i mange sammenhenger.

I prosessen ovenfor antok vi at vannstrømmen (q) var konstant og at ytre forstyrrelser kom i form av temperaturendringer (v_1 og v_2). Differensiallikningene som resulterte av dette ble da lineære med konstante koeffisienter. Hadde vi antatt at vannstrømmen var tidsvarierende ville koeffisientene a_{22} og c_{21} blitt tidsvarierende. Likningene vil da bli vanskeligere å løse.

Eksempel 2, Forenklet varmeveksler

I fig. 2.3 er vist en primitiv varmeveksler (varmtvannsbereder) der en kald vannstrøm (q) med temperatur v_1 kommer inn øverst til venstre. Midt i beholderen sitter en varmekolbe med et hetelement som tilføres en elektrisk effekt u_1 . Vi antar at varmekolben har en masse m_1 og en spesifikk varmekapasitet c_1 . Temperaturen antas for enkelhets skyld å være den samme over alt i varmekolben, nemlig x_1 . Varmeovergangstallet mellom varmekolben og vannet er g_1 .



Figur 2.3

Temperaturen x_2 i vannet antas å være den samme overalt i beholderen (dette kan oppnås med intens omrøring hvis det er behov for det, men det er her antatt for at den matematiske behandlingen skal bli enkel). Massen av vannet i beholderen betegnes med m_2 og den spesifikke varmekapasitet er c_2 . Det totale varmeovergangstall mellom beholderen og den omgivende luft betegnes med g_2 og den omgivende lufts temperatur er v_2 . For dette system kan det settes opp to energibalanser, en for varmekolben og en for beholderen med ytre isolasjon. For varmekolben kan vi umiddelbart uttrykke at summen av den energi som tilføres, akkumuleres og bortføres må være lik null eller; den energi som

akkumuleres er lik differansen mellom den som tilføres og den som bortføres. Akkumuleringen av energi foregår ved temperaturstigning i varmekolben og vi finner at den akkumulerte energi pr. tidsenhet vil være

$$m_1 c_1 \frac{dx_1}{dt}$$

Den tilførte effekt er lik u_1 . Den effekt som føres bort fra kolben antas å være proporsjonal med temperaturdifferansen mellom kolben og det omgivende vann ($x_1 - x_2$) og proporsjonal med varmeovergangstallet g_1 , altså $g_1(x_1 - x_2)$. Vi finner derfor for varmekolben

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{m_1 c_1} (u_1 - g_1(x_1 - x_2)) \quad (2.15)$$

For vannet i beholderen har vi likedan at den energi som akkumuleres er lik differansen mellom det som tilføres og det som bortføres. Akkumulert energi pr. tidsenhet i vannet er lik

$$m_2 c_2 \frac{dx_2}{dt}$$

Tilført energi består av den energi som kommer fra varmekolben ($g_1(x_1 - x_2)$) og den energi som følger med det tilførte vann til beholderen. Dersom væskestrømmen (q) er volumstrøm og vannets tetthet er ρ , vil den tilførte energi pr. tidsenhet med vannet bli $q\rho c_2 v_1$. Den energi som bortføres fra beholderen består av to komponenter:

Energi som bortføres med utstrømmende vann ($q\rho c_2 x_2$) og energitapet gjennom isolasjonen til omgivelsene på grunn av varmeledning, -konveksjon og -stråling.

Energitalapet til omgivelsene antas proporsjonalt med temperaturdifferansen mellom vannet og den omgivende luft ($x_2 - v_2$) og proporsjonalt med varmeovergangstallet g_2 .

Varmebalansen for beholderen vil da gi oss

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{m_2 c_2} (g_1 (x_1 - x_2) + q \rho c_2 v_1 - q \rho c_2 x_2 - g_2 (x_2 - v_2)) \quad (2.16)$$

På basis av (2.15) og (2.16) kan vi derfor lage følgende matematiske beskrivelse av prosessen

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_{11} u_1 \quad (2.17)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + c_{21} v_1 + c_{22} v_2 \quad (2.18)$$

$$a_{11} = -\frac{g_1}{m_1 c_1}, \quad a_{12} = \frac{g_1}{m_1 c_1} = -a_{11}$$

$$a_{21} = \frac{g_1}{m_2 c_2}, \quad a_{22} = \frac{1}{m_2 c_2}(-g_1 - q\rho c_2 - g_2)$$

$$b_{11} = \frac{1}{m_1 c_1}, \quad c_{21} = \frac{q\rho}{m_2}, \quad c_{22} = \frac{g_2}{m_2 c_2}$$

(2.17) og (2.18) viser at vi også for dette system har fått to koplete første ordens differensiallikninger av en type som vi
 ▲ senere skal møte i mange sammenhenger.

I prosessen ovenfor antok vi at vannstrømmen (q) var konstant og at ytre forstyrrelser kom i form av temperaturendringer (v_1 og v_2). Differensiallikningene som resulterte av dette ble da lineære med konstante koeffisienter. Hadde vi antatt at vannstrømmen var tidsvarierende ville koeffisientene a_{22} og c_{21} blitt tidsvarierende. Likningene vil da bli vanskeligere å løse.