5.16.1 Styrbarhet

Definisjon:

Et system som kan beskrives av tilstandsrommodellen: $\dot{x} = Ax + Bu$ er styrbart dersom det eksisterer et endelig sett pådrag u(t) som kan bringe systemet fra en vilkårlig starttilstand, x(0), til en hvilken som helst ønsket tilstand x(t).

Det kan vises, men beviset gis ikke her, at et system er styrbart i henhold til definisjonen dersom:

$$\text{rang}\ [\ B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots\cdots \mid A^{n-1}B\ ] = n$$

Der n er antall tilstander i systemet

Matrisen P betegnes som styrbarhetsmatrisen.

$$P = [\ B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots\cdots \mid A^{n-1}B\ ]$$

Rangen til en matrise er dimensjonen til største undermatrisen med determinant $\neq 0$

For P matrisen:

- P vil alltid ha n rader, der n er antall tilstander
- Dersom systemet bare har ett pådrag, har B bare én kolonne. Antall kolonner i P blir da lik n. Altså er P i dette tilfelle kvadratisk.
- Med bare ett pådrag blir derfor kravet til styrbarhet at: det $[P] \neq 0$

Eksempel 5.16.1.1:

Gitt systemet $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

Dette systemet har tre tilstander. Altså er n = 3

Styrbarhetsmatrisen blir her: $P = [B \mid AB \mid A^2B]$

Denne må ha rang = 3 for at systemet skal være styrbart. Følgelig må $P \neq 0$:

Beregner styrbarhetsmatrisen:

$$P = \left[\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right]$$

$$P = \left[\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}0 & \vdots & 0 & \vdots & 1\\0 & \vdots & 1 & \vdots & -1\\1 & \vdots & -1 & \vdots & -1\end{bmatrix}$$

Undersøker styrbarhet:

det [P] = $1 \cdot (\ -1 \ ) = -\ 1 \neq 0$

konklusjon: Systemet er styrbart

Eksempel 5.16.1.2:

$\dot{x}_1 = -2\,x_1 + u$ og $\dot{x}_2 = -3x_2 + dx_1$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Styrbarhetsmatrisen: $P = [\ B \mid AB\ ] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

$\det[P] = d$

Krav til styrbarhet: $d \neq 0$

Eksempel 5.16.1.2:

$\dot{x}_1 = -2\,x_1 + u$ og $\dot{x}_2 = -3x_2 + dx_1$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Styrbarhetsmatrisen: $P = [\ B \mid AB\ ] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

$\det[P] = d$

Krav til styrbarhet: $d \neq 0$

5.16.2 Observerbarhet

Definisjon:

Et system som kan beskrives av tilstandsrommodellen:

$$\dot{x} = Ax + Bu \text{ og } y = Cx$$

er observerbart dersom det eksisterer en endelig tid, T, slik at starttilstanden x(0) kan beregnes ut fra målingene y(t) i tidsrommet t = 0 til t = T, forutsatt at u(t) er kjent i samme periode.

Observerbarhetsmatrisen, Q:

Matrisen Q betegnes observerbarhetsmatrisen:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Systemet er observerbart dersom rang Q = n som er antall tilstander.

Dersom antall rader i $C = r$ som er antall målinger og $r = 1$, én måling, får Q n rader og n kolonner. Kravet til observerbart blir da: $\det[Q] \neq 0$

Eksempel 5.16.2.1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{og } \mathrm{y} = \mathrm{x}_1 = [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]\ \mathrm{x}$$

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{CA}^2 = \mathrm{CAA}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Altså: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Siden det Q = 1 er dette systemet observerbart

Gitt systemet: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$ og y = [1 1] x

Styrbarhetsmatrise:

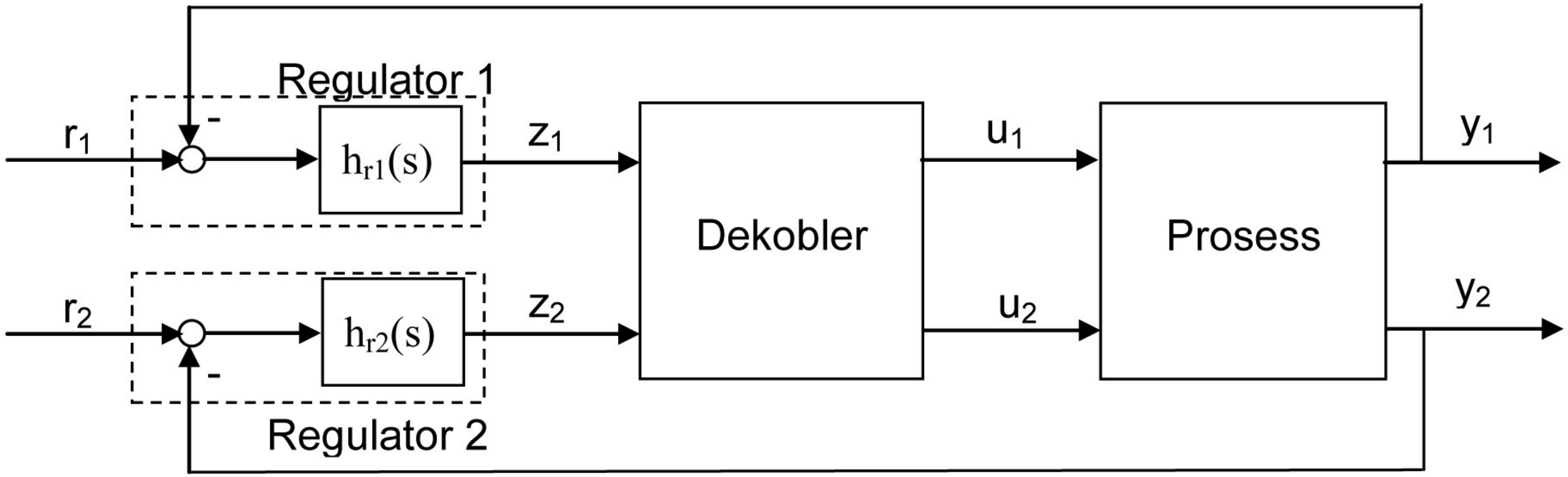
$$P = [\ B \mid AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

det[P] = -2 + 2 = 0, systemet er ikke styrbart.

Observerbarhetsmatrise:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

det [Q] = 1 – 1 = 0, systemet er ikke observerbart.



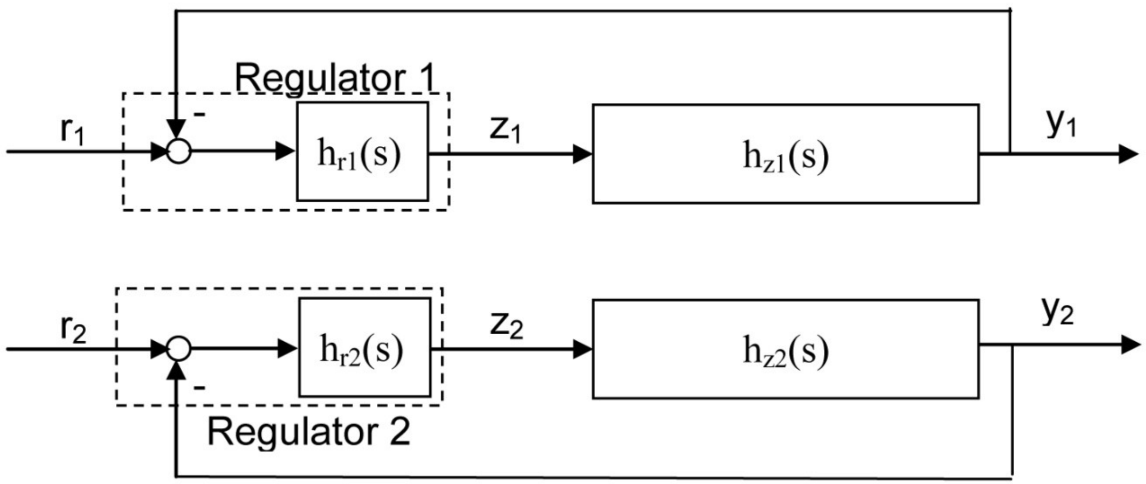
Figur 5.17.1 viser en prosess med to pådrag og to målinger

Metode:

Metode:

Det er ønskelig å konstruere dekobleren slik at den første inngangen til dekobleren, z_1, bare påvirker den første utgangen, y_1, og den andre inngangen til dekobleren, z_2, bare påvirker den andre utgangen, y_2. Matematisk kan dette uttrykkes slik:

$$y_1(s) = h_{z1}(s)\, z_1(s) \qquad \text{og} \qquad y_2(s) = h_{z2}(s)\, z_2(s)$$



Anta at prosessen kan beskrives med transfermatrisen:

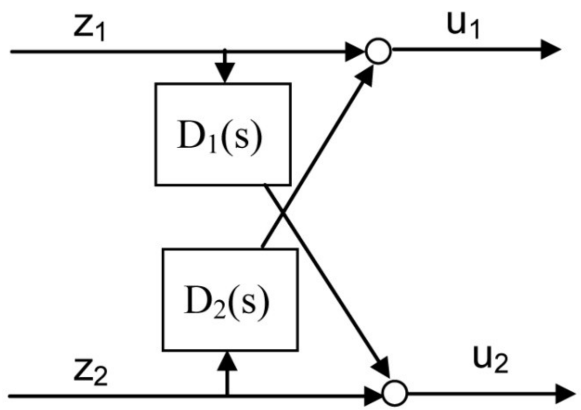
$$H_P(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Det skal så bestemmes en tilsvarende transfermatrise for dekobleren:

$$D(s) = \frac{u(s)}{z(s)} = \begin{bmatrix} d_{11}(s) & d_{12}(s) \\ d_{21}(s) & d_{22}(s) \end{bmatrix}$$

D(s) inneholder fire transferfunksjoner dersom systemet har to pådrag og to målinger. Dette kan forenkles noe ved å sette:

$d_{11}(s) = 1$
$d_{22}(s) = 1$
$D_1(s) = d_{21}(s)$
$D_2(s) = d_{12}(s)$



Ligningene for dekobleren blir:

$$u_1(s) = z_1(s) + D_2(s)z_2(s)$$
$$u_2(s) = D_1(s)z_1(s) + z_2(s)$$

For prosessen gir dette:

$$y_1(s) = h_{11}(s)u_1(s) + h_{12}(s)\, u_2(s)$$
$$y_2(s) = h_{21}(s)u_1(s) + h_{22}(s)\, u_2(s)$$

$$y_1(s) = h_{11}(s)\{\ z_1(s) + D_2(s)z_2(s)\ \}\ +\ h_{12}(s)\ \{\ D_1(s)z_1(s) + z_2(s)\ \}$$
$$y_1(s) = \{h_{11}(s) + D_1(s)h_{12}(s)\}\ z_1(s)\ +\ \{\ D_2(s)h_{11}(s) + h_{12}(s)\ \}\ z_2(s)\ = h_{z1}(s)\ z_1(s)$$

$$y_2(s) = h_{21}(s)\{\ z_1(s) + D_2(s)z_2(s)\ \}\ +\ h_{22}(s)\ \{\ D_1(s)z_1(s) + z_2(s)\ \}$$
$$y_1(s) = \{h_{21}(s) + D_1(s)h_{22}(s)\}\ z_1(s)\ +\ \{\ D_2(s)h_{21}(s) + h_{22}(s)\ \}\ z_2(s)\ = h_{z2}(s)\ z_2(s)$$

Siden y_1 bare skal være avhengig av z_1 og y_2 bare skal være avhengig av z_2 må:

$$D_2(s)h_{11}(s) + h_{12}(s) = 0$$

$$D_2(s) = \underline{\underline{-\frac{h_{12}(s)}{h_{11}(s)}}}$$

$$h_{21}(s) + D_1(s)h_{22}(s) = 0$$

$$D_1(s) = \underline{\underline{-\frac{h_{21}(s)}{h_{22}(s)}}}$$

De resulterende transferfunksjonene for de to dekoblede sløyfene blir:

$$h_{z1}(s) = h_{11}(s) + D_1(s)h_{12}(s)$$
$$h_{z2}(s) = D_2(s)h_{21}(s) + h_{22}(s)$$

Eksempel 5.16.1

Prosess: $H_P(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{12s+1} & \dfrac{-0.5}{13s+1} \\ \dfrac{-0.5}{10s+1} & \dfrac{1.05}{3s+1} \end{bmatrix}$

Dekobler: $D_1(s) = -\dfrac{h_{21}(s)}{h_{22}(s)} = \dfrac{0.5(3s+1)}{(10s+1)1.05} = \underline{\underline{\dfrac{0.48(3s+1)}{10s+1}}}$

$D_2(s) = -\dfrac{h_{12}(s)}{h_{11}(s)} = \dfrac{0.5(12s+1)}{(13s+1)1} = \underline{\underline{\dfrac{0.5(12s+1)}{13s+1}}} \quad (\approx 0.5)$

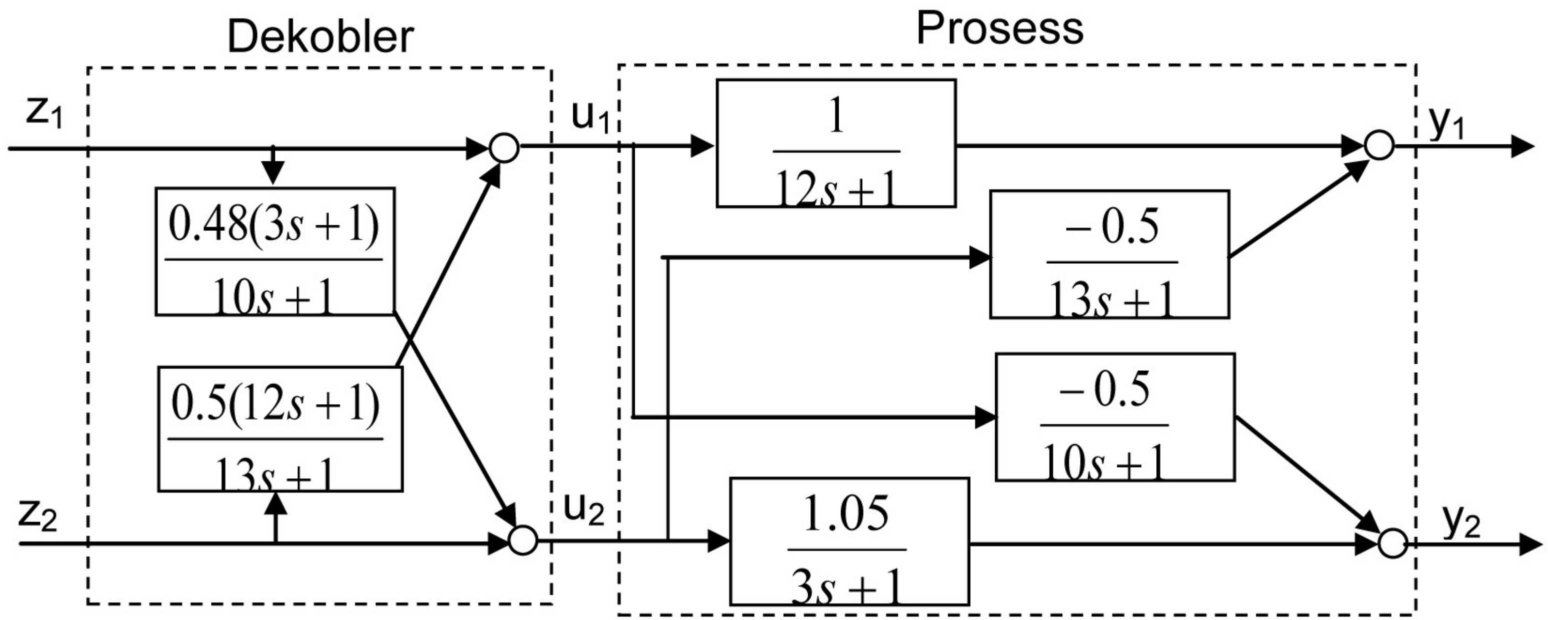
Dekoblet prosess:

$$h_{z1}(s) = h_{11}(s) + D_1(s)h_{12}(s) = \frac{1}{12s+1} + \frac{0.48(3s+1)}{10s+1}\frac{(-0.5)}{13s+1}$$

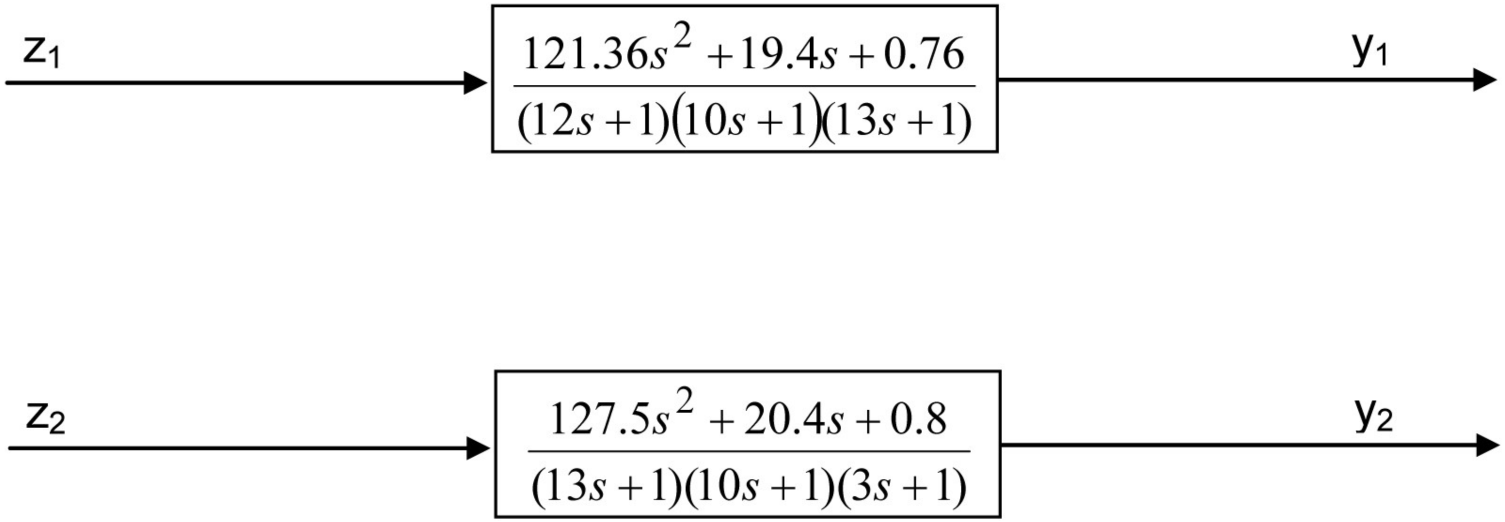
$$h_{z1}(s) = \frac{(10s+1)(13s+1) - 0.24(3s+1)(12s+1)}{(12s+1)(10s+1)(13s+1)} = \frac{121.36s^2 + 19.4s + 0.76}{(12s+1)(10s+1)(13s+1)}$$

$$h_{z2}(s) = D_2(s)h_{21}(s) + h_{22}(s) = \frac{0.5(12s+1)}{13s+1}\frac{(-0.5)}{10s+1} + \frac{1.05}{3s+1}$$

$$h_{z2}(s) = \frac{-0.25(12s+1)(3s+1) + 1.05(13s+1)(10s+1)}{(13s+1)(10s+1)(3s+1)} = \frac{127.5s^2 + 20.4s + 0.8}{(13s+1)(10s+1)(3s+1)}$$



Figur 5.17.3 viser prosess med dekobler



Figur 5.17.4 viser en totalt dekoblet prosess: