5.15.3 Dynamisk oppførsel

Metoden som beskrives her, går ut på å velge polene slik at overføringsfunksjonene for det tilbakekoblede system får samme egenskaper som et butterworthfilter. Et butterworthfilter har transferfunksjonen:

$$H(s) = \frac{1}{p_n(s)}$$

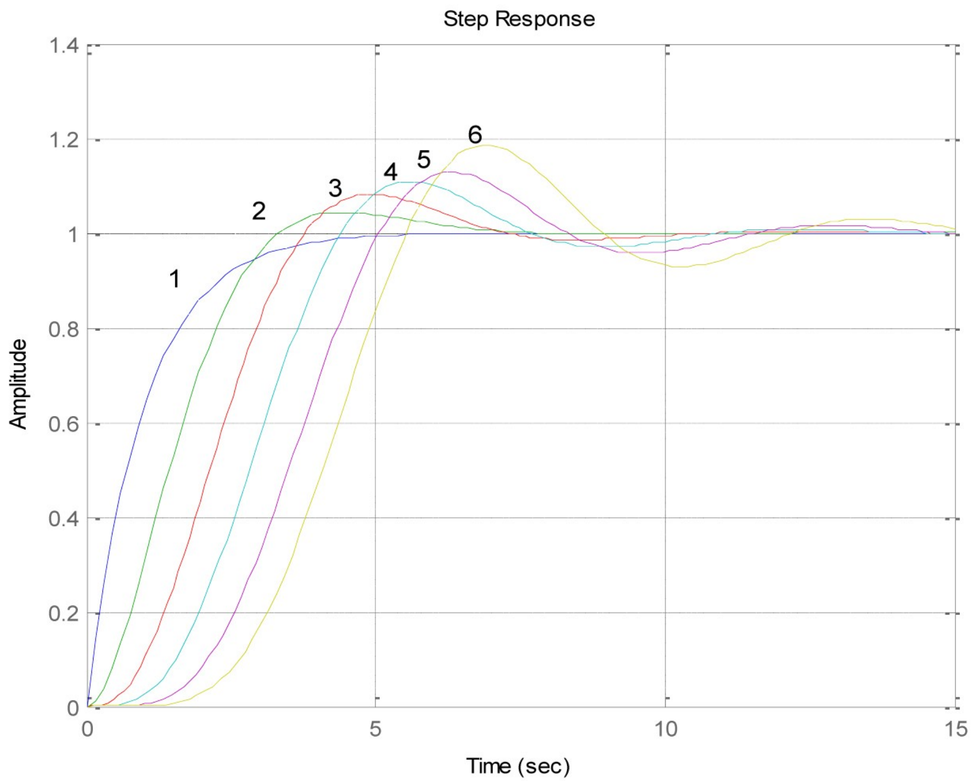
n	Butterworthpolynom, $p_n(s)$
1	$(s + 1)$
2	$(s^2 + \sqrt{2}\, s + 1)$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.484s + 1)$
5	$(s + 1)\ (s^2 + 0.618s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)$
6	$(s^2 + 0.518s + 1)\ (s^2 + 1.247s + 1)(s^2 + 1.932s + 1)$

Tabellen 5.15.3 viser en oversikt over nevnerpolynomene for butterworthfiltre med båndbredde $\omega_b = 1$.

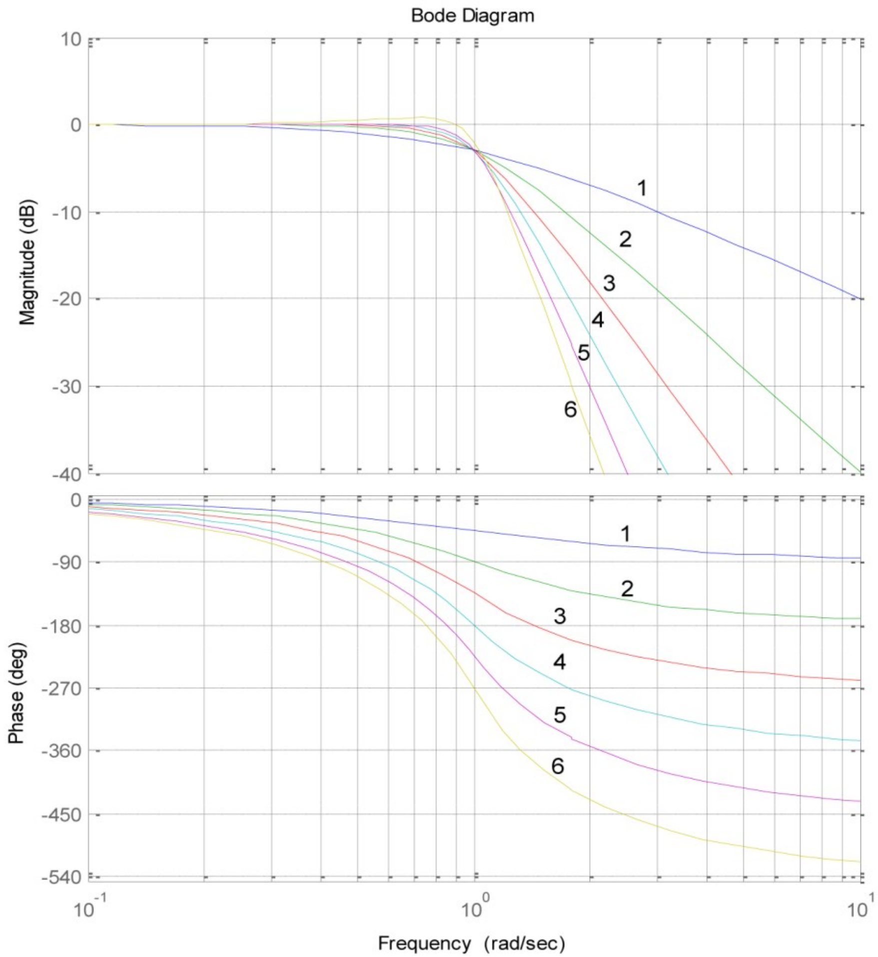
For applikasjoner med andre båndbredder må s erstattes med $\dfrac{s}{\omega_b}$ i polynomene.

For et 2. ordenssystem er $\omega_b = \omega_0$ = resonansfrekvensen, og systemet har relativ dempning:

$$\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071$$



Figur 5.15.3.1 viser sprangresponser for filteret



Figur 5.15.3.2 viser frekvensresponser for filteret

En ”standard”-regel er at reguleringssystemet skal være dobbelt så raskt som prosessen selv.

Dersom prosessens responstid er T_P ,må derfor reguleringssystemet ha responstiden T_R :

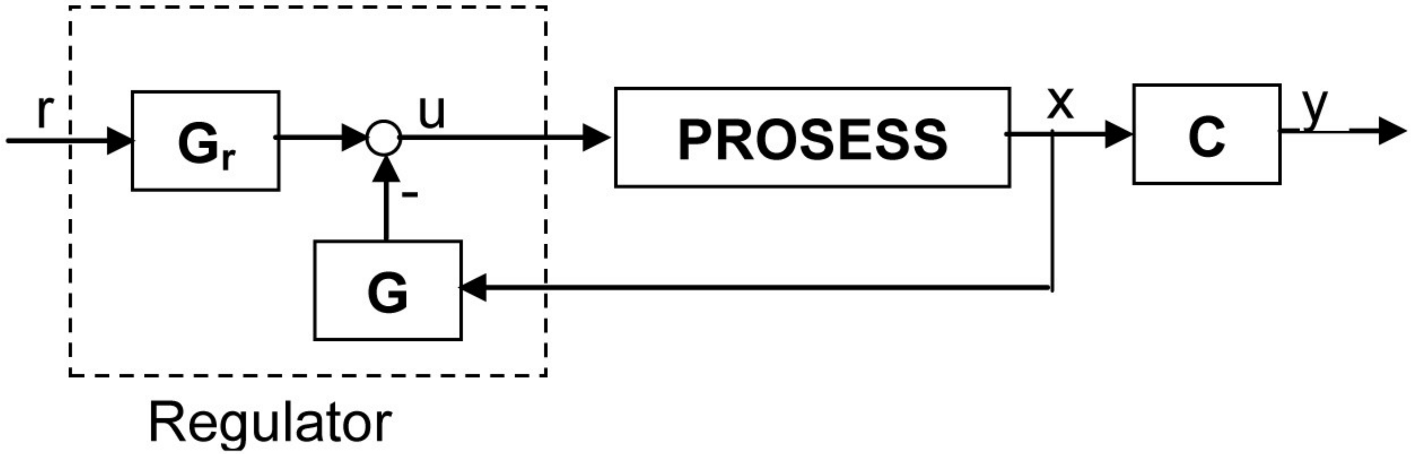
$$T_R \approx \frac{T_P}{2}$$

Det er også en god regel å si at reguleringssystemets båndbredde, ω_b, skal være fra 2 til 4 ganger så stor som den dominerende knekkfrekvens, ω_k, i prosessens frekvensrespons:

$$2\omega_k < \omega_b < 4\omega_k$$

For $n = 1$ er $T_R = 1/\omega_b$

Av sprangresponsene går det frem at dersom $n > 1$ er $T_R \approx n \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{\omega_b}$



Figur 5.15.4.1 viser et tilbakekoblet system

$$\dot{x} = Ax + B\,[G_r r - Gx] = [A\text{-}BG]x + BG_r r = A_R x + BG_r r$$

$$y = Cx$$

der $A_R = A - BG$ blir systemmatrisen for det tilbakekoblede system. Polene for det tilbakekoblede system finnes av:

$$\det[\,sI - A_R\,] = \det[\,sI - (A\text{-}BG)] = 0$$

Transfermatrisen fra r til y blir:

$H(s) = C\,[sI - A_R]^{-1} B G_r$

Dimensjonen på denne matrisen blir r x m der r = antall pådrag og m = antall målinger. Matrisen inneholder derfor r x m transferfunksjoner med nevnerpolynom:

$\det[\,sI - A_R\,]$

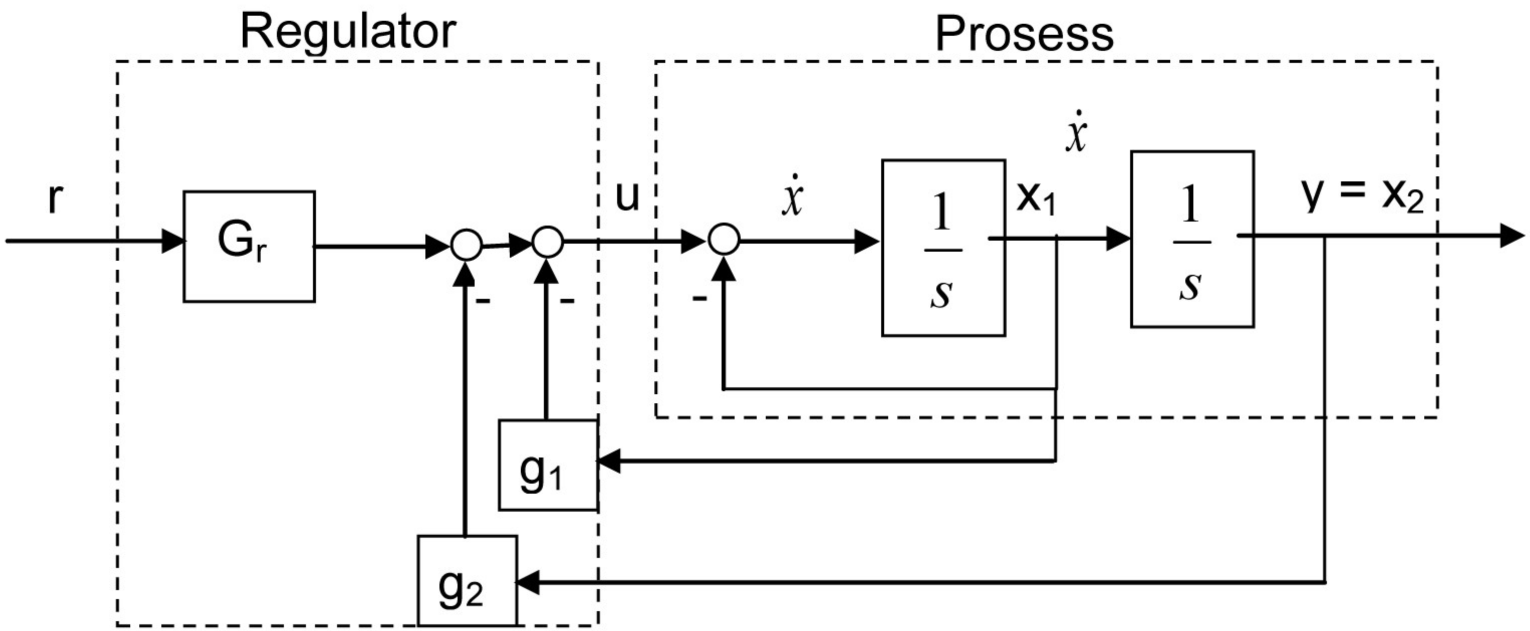
Dersom prosessen har en dominerende knekkfrekvens, ω_k, velges båndbredde, ω_b, for det tilbakekoblede systemet, dette gir:

$2\omega_k < \omega_b < 4\omega_k$

Med et system av n. orden, settes $S = \frac{s}{\omega_b}$ inn i Butterworthpolynomet, $p_n(S)$, i tabellen:

n	Butterworthpolynom, $p_n(S)$
1	$(S+1)$
2	$(S^2 + \sqrt{2}\,S + 1)$
3	$(S + 1)(S^2 + S + 1)$
4	$(S^2 + 0.765S + 1)(S^2 + 1.484S + 1)$
5	$(S + 1)\,(S^2 + 0.618S + 1)(S^2 + 1.618S + 1)$
6	$(S^2 + 0.518S + 1)\,(S^2 + 1.247S + 1)(S^2 + 1.932S + 1)$

Siden $p_n(s) = 0$ skal gi samme røtter som det $[\, sI - (A\text{-}BG)] = 0$, og gir på denne måten ligninger for å bestemme forsterkningsmatrisen, G.



Eksempel 5.15.4.2 er det samme som ble diskutert under polplasseringsregulering.

Dette er et 2. ordens system, n = 2. Prosessen har transferfunksjonen $H(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$.

Denne prosessen har en knekkfrekvens: $\omega_k = 1$.

Reguleringssystemet skal ha en båndbredde, ω_b : $2\omega_k < \omega_b < 4\omega_k$.

Velger $\omega_b = 3$

Butterworthpolynomet for et 2. ordens system med $\omega_b = 3$ blir:

$$p_n(s) = \left(\frac{s}{3}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{3}\right) + 1$$

Røttene i polynomet finnes av: $s^2 + 3\sqrt{2}\,s + 9 = 0$

Som vist tidligere finnes polene for reguleringssystemet av:

$$\det[\, sI - A_R \,] = \det[\, sI - A + BG] = s^2 + (g_1+1)s + g_2 = 0$$

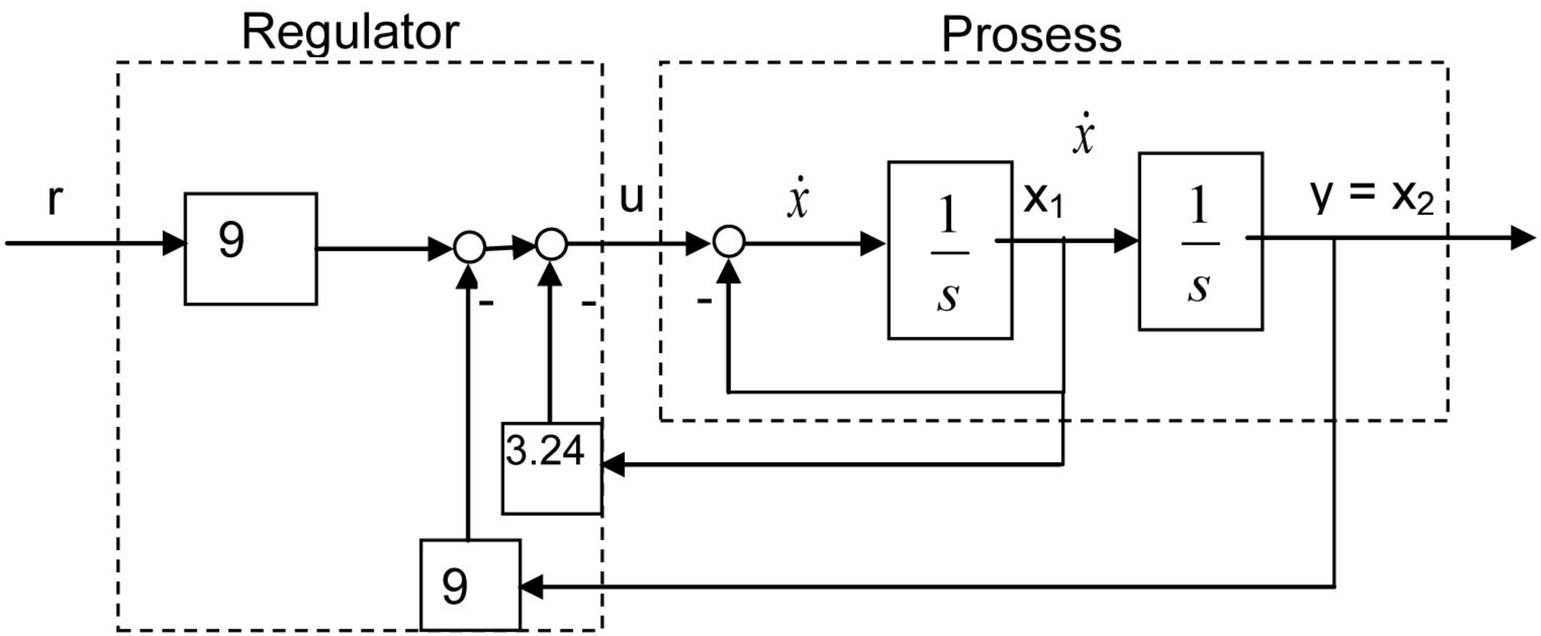
Da må :

$$g_1 + 1 = 3\sqrt{2}$$

$$g_1 = 3\sqrt{2} - 1 = 3.2426$$

$$g_2 = 9$$

Med $G_R = g_2 = 9$ blir reguleringssystemet:



Figur 5.15.4.3 viser reguleringssystemet skjematisk

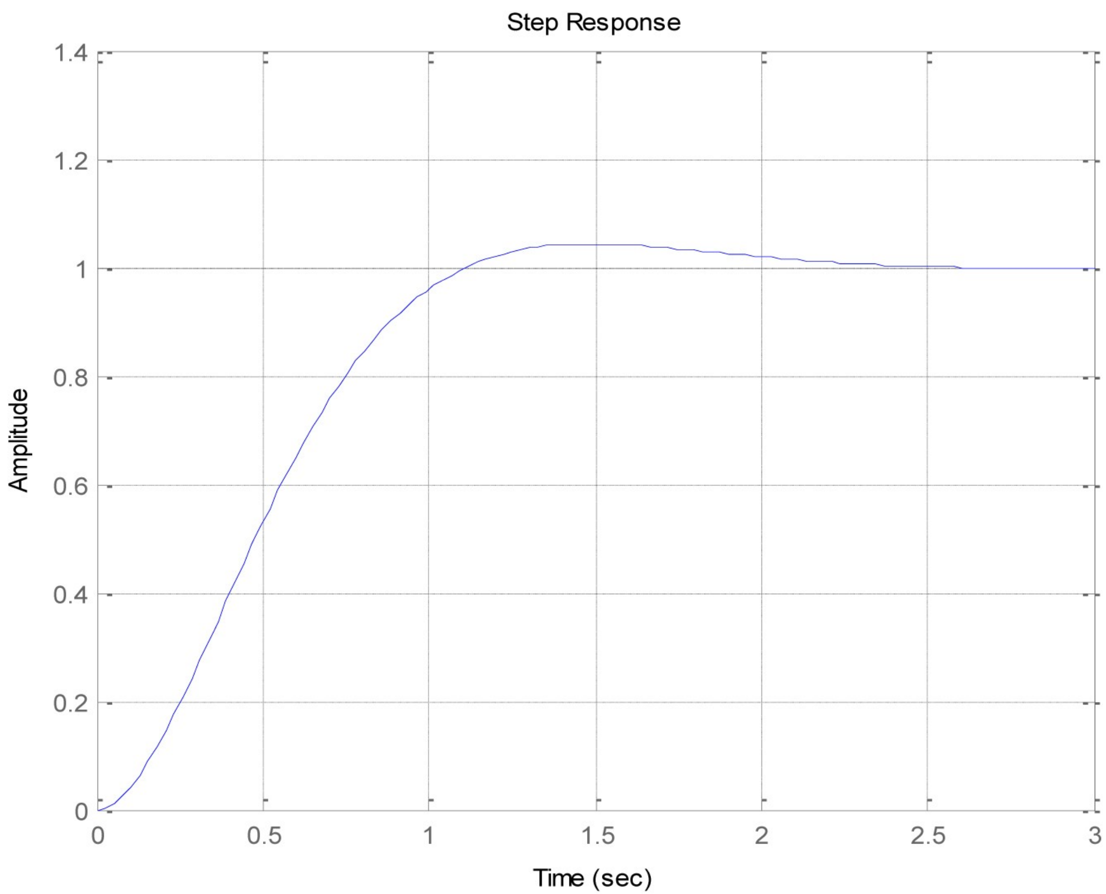
Transferfunksjonen mellom r og y blir:

H(s) = C $[sI-A_R]^{-1}BG_r$ =

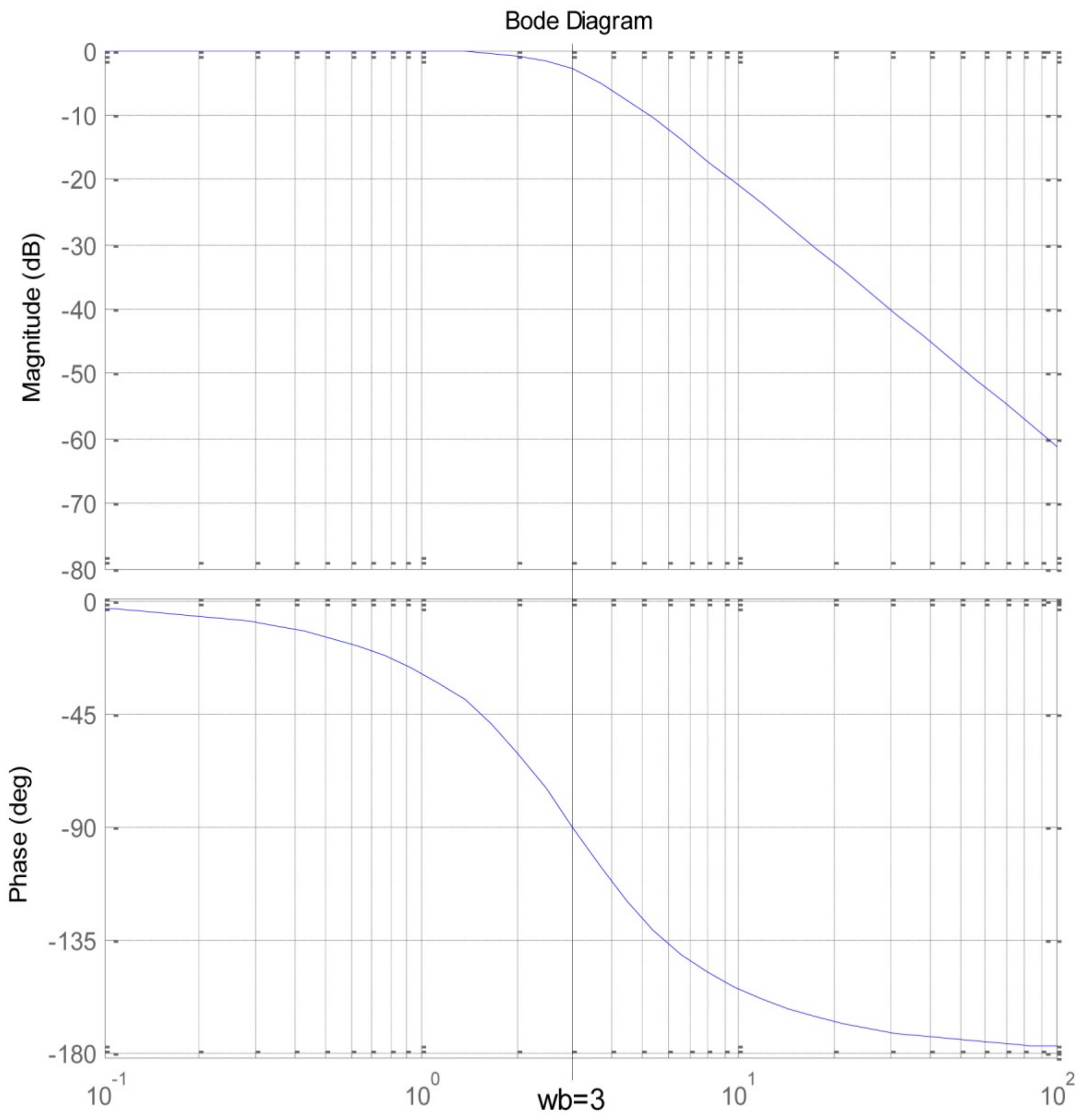
$$\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1+g_1 & g_2\\ -1 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}G_R = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+3\sqrt{2} & 9\\ -1 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}9\\ 0\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{(s(s+3\sqrt{2})+9}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -9\\ 1 & s+3\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{(s(s+3\sqrt{2})+9}\begin{bmatrix}1 & s+3\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\ 0\end{bmatrix} = \frac{9}{(s(s+3\sqrt{2})+9}$$

H(s) = $\dfrac{y(s)}{r(s)} = \dfrac{9}{s^2+3\sqrt{2}s+9}$



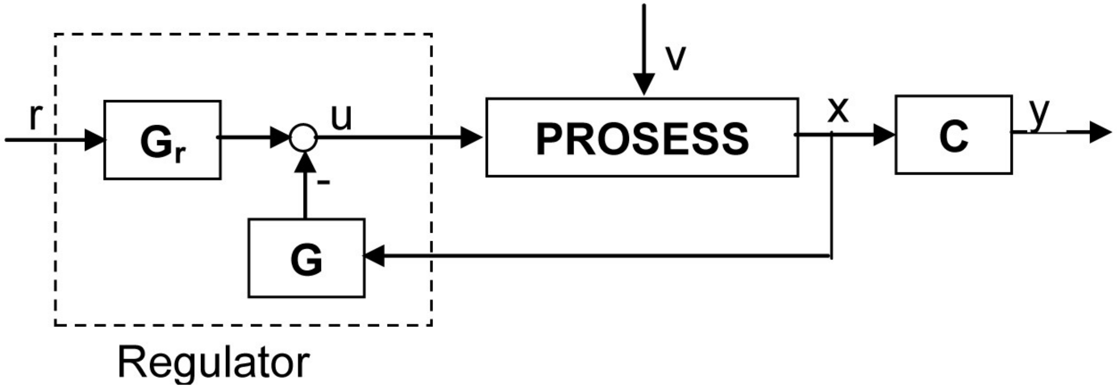
Figur 5.15.4.4 viser systemets sprangrespons



Bode Diagram
Magnitude (dB)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
10^{-1}
10^{0}
wb=3
10^{1}
10^{2}

5.15.5 Polplassering med integralvirkning

Som for konvensjonell PID regulering vil vanlig polplasseringsregulering kunne gi stasjonært avvik dersom prosessen utsettes for en konstant forstyrrelse.



Figur 5.15.5.1 viser en generell prosess der prosessen er påvirket av støy

Gitt en prosess med støy:

$\dot{x}$ = Ax + Bu + Ev og y = Cx

v er støy og E er støymatrisen.

Antar for enkelhets skyld at systemet kun har én måling, y, og ett pådrag, u.
Antar videre at tilbakekoblingsmatrisen er bestemt som beskrevet foran. At det vil etableres et stasjonært avvik med v = konstant kan vises på følgende måte:

Stasjonært er $\dot{x}$ = 0.

$Ax_s + Bu + Ev = Ax_s - BGx_s + G_r r_s + Ev = 0$

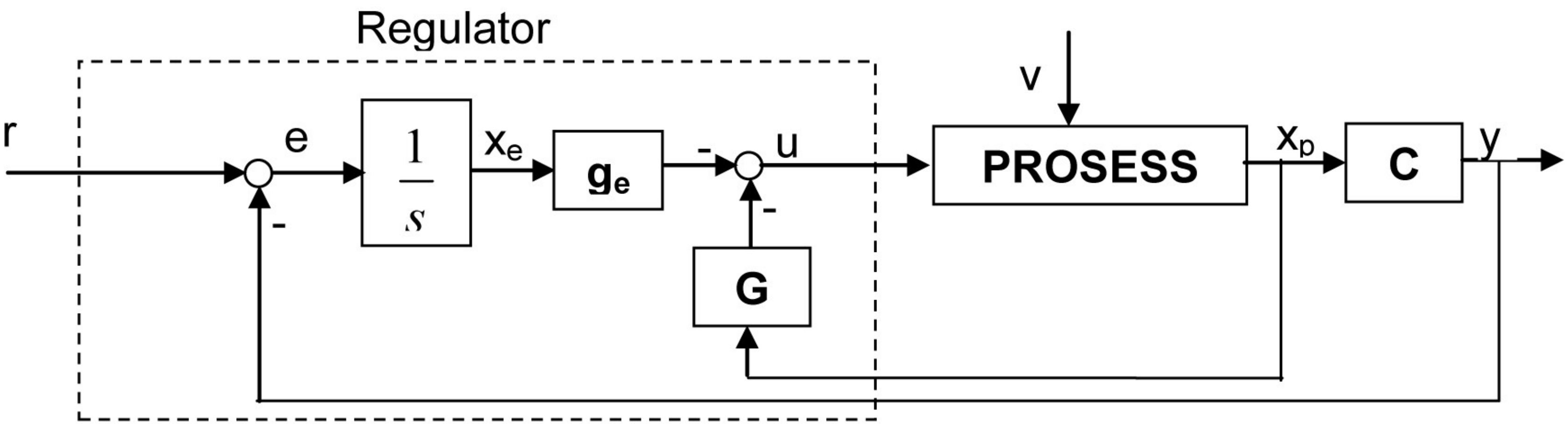
Dette gir:

$y_s = Cx_s = -C [A – BG]^{-1}BG_r r_s - C [A – BG]^{-1}E v$

G er bestemte G_r slik at $y_s = r_s$.

Dersom støy gir at $v \neq 0$, vil ikke lenger $y_s = r_s$

For å korrigere dette innføres en integrasjon i tilbakekoblingen.



Figur 5.15.5.2 viser systemet med én integrator i tilbakekoblingen

Avviket, e, mellom r og y går inn på en integrator. Utgangen av integratoren betegnes x_e. Da er:

$$\dot{x}_e = e = r - y$$

Stasjonært gir dette:

$$\dot{x}_{es} = e_s = r_s - y_s = 0$$

$$r_s = y_s$$

Altså gir en integrasjon i reguleringssystemet null stasjonært avvik, selv med støy.

En integrasjon betyr at reguleringssystemet får en tilstand mer enn prosessen. Ligningen for denne tilstanden er:

$$\dot{x}_e = \mathrm{e} = \mathrm{r} - \mathrm{y}$$

Ligningene for prosesstilstandene er:

$$\dot{x}_\mathrm{p} = \mathrm{Ax_p + Bu + Ev \text{ og } y = Cx_p}$$

Tilstandsvektoren utvides med én tilstand som gir den utvidede tilstandsvektoren:

$$\mathrm{x_u} = \begin{bmatrix} x_p \\ x_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_e \end{bmatrix}$$

Dette gir den utvidede tilstandsromligningen:

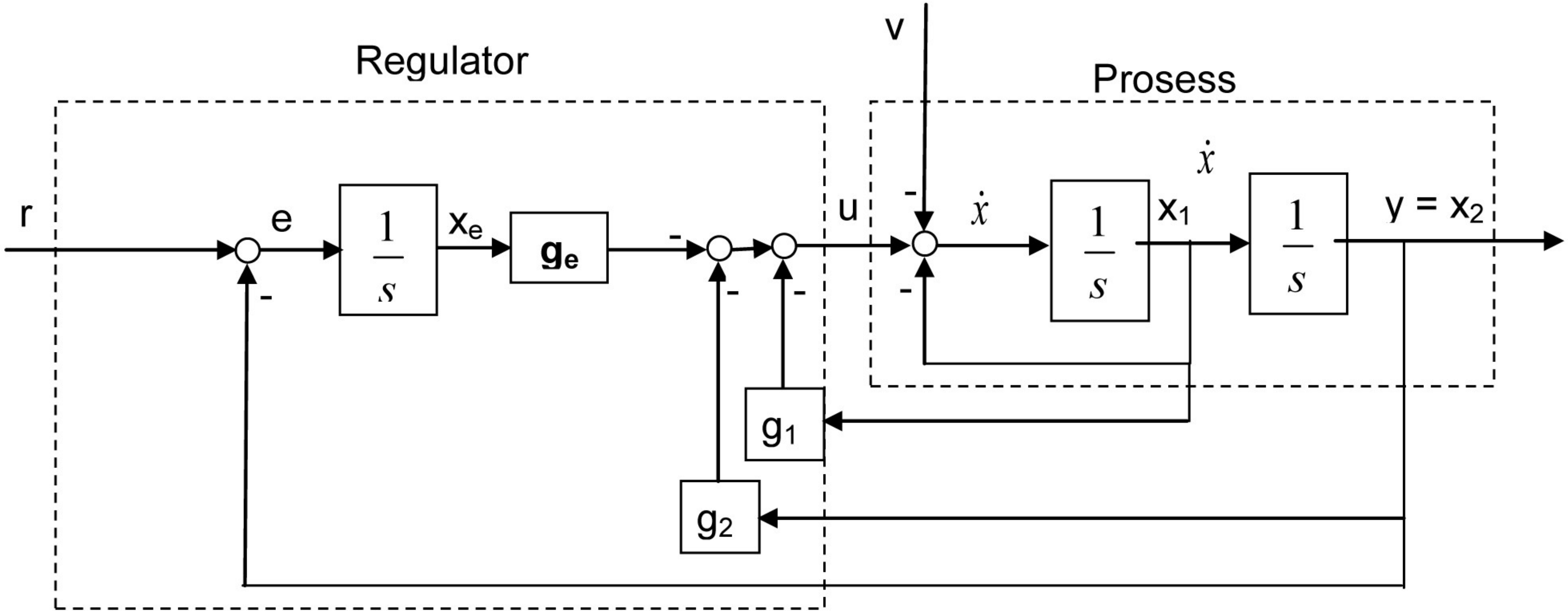
$$\dot{x}_u = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} x_u + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad = A_u x_u + B_u u + E_u v + Fr$$

Regulatorfunksjonen blir nå:

$u = - g_1 x_1 - g_2 x_2 - \ldots\ldots - g_n x_n - g_e x_e = - G_u x_u$

Beregningen av G_u kan gjøres på nøyaktig samme måte som tidligere ved å la polplasseringen i reguleringssystemet bestemme verdiene i G_u:

$\det [\, sI - (A_u - B_u G_u)] = 0$



Figur 5.15.5.3 viser et kjent system med regulator og prosess som før

Eksempelet er brukt tidligere, men nå er det inkludert støy (v).

Prosessmodellen kan skrives:

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} v = Ax_p + Bu + Ev$$

Videre er:

$$y = [\,0 \quad 1\,]\, x = Cx$$

Den utvidede tilstandsvektor: $x_u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_e \end{bmatrix}$

Den utvidede tilstandsrommodellen: $\dot{x}_u = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x_u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$

$$A_u - B_u G_u = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\, g_1 \;\; g_2 \;\; g_e \,] = \begin{bmatrix} -1-g_1 & -g_2 & -g_e \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det [\, sI - (A_u - B_u G_u) \,] = \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1-g_1 & -g_2 & -g_e \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \det \begin{bmatrix} s+1+g_1 & g_2 & g_e \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix} = s^2(s + 1 + g_1) + g_2\, s - g_e = s^3 + (1 + g_1)s^2 + g_2 s - g_e = 0$$

Butterworthpolynomet med $\omega_b = 3$, det vil si den samme båndbredde som benyttet tidligere og $n = 3$:

$$\left(\frac{s}{3}+1\right)\left\{\left(\frac{s}{3}\right)^2+\frac{s}{3}+1\right\}=0$$

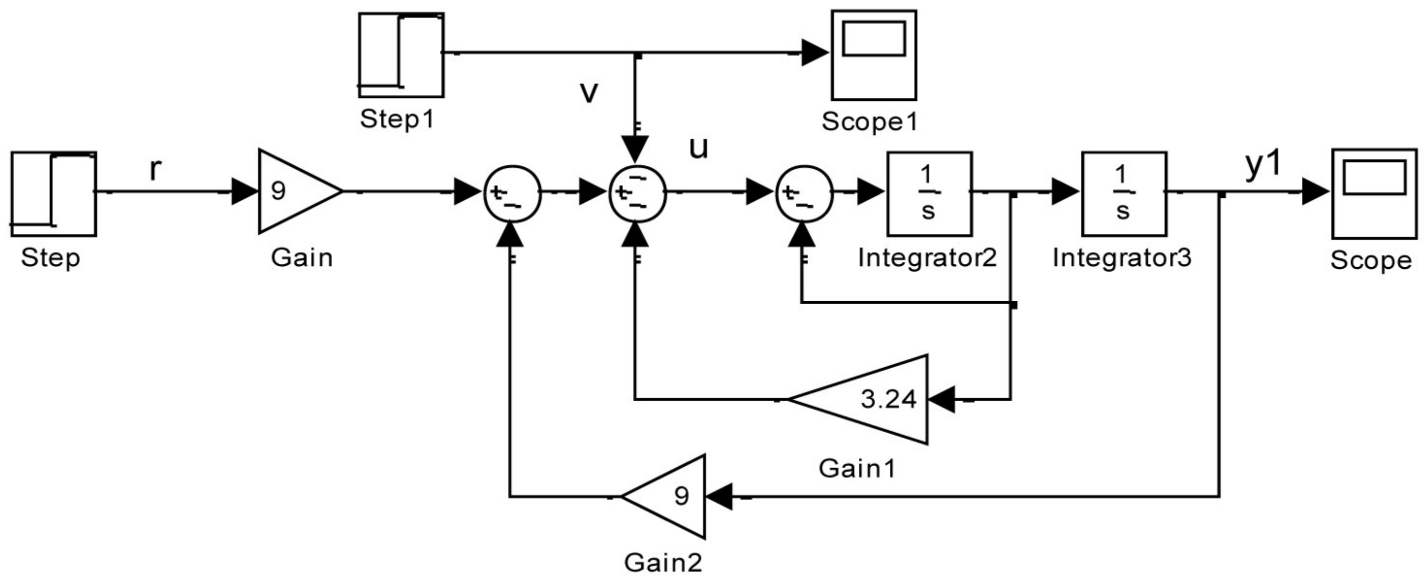
$$(s + 3)(s^2 + 3s + 9) = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 18s + 27 = 0$$

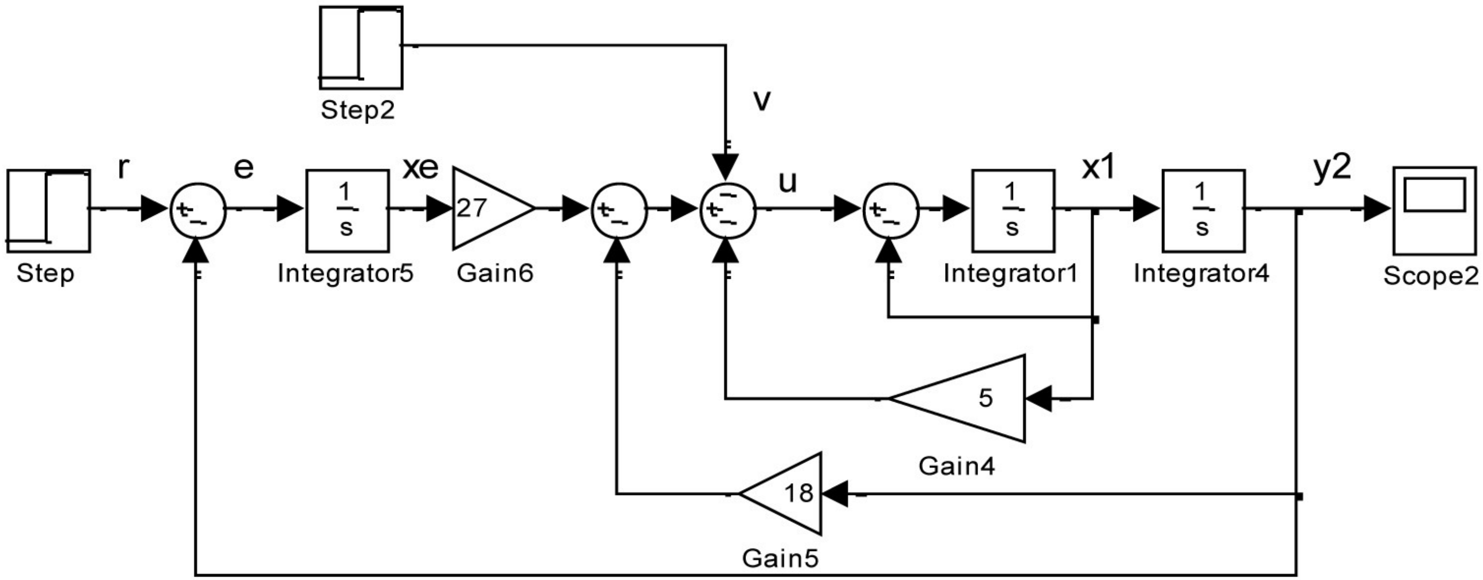
Dette gir:

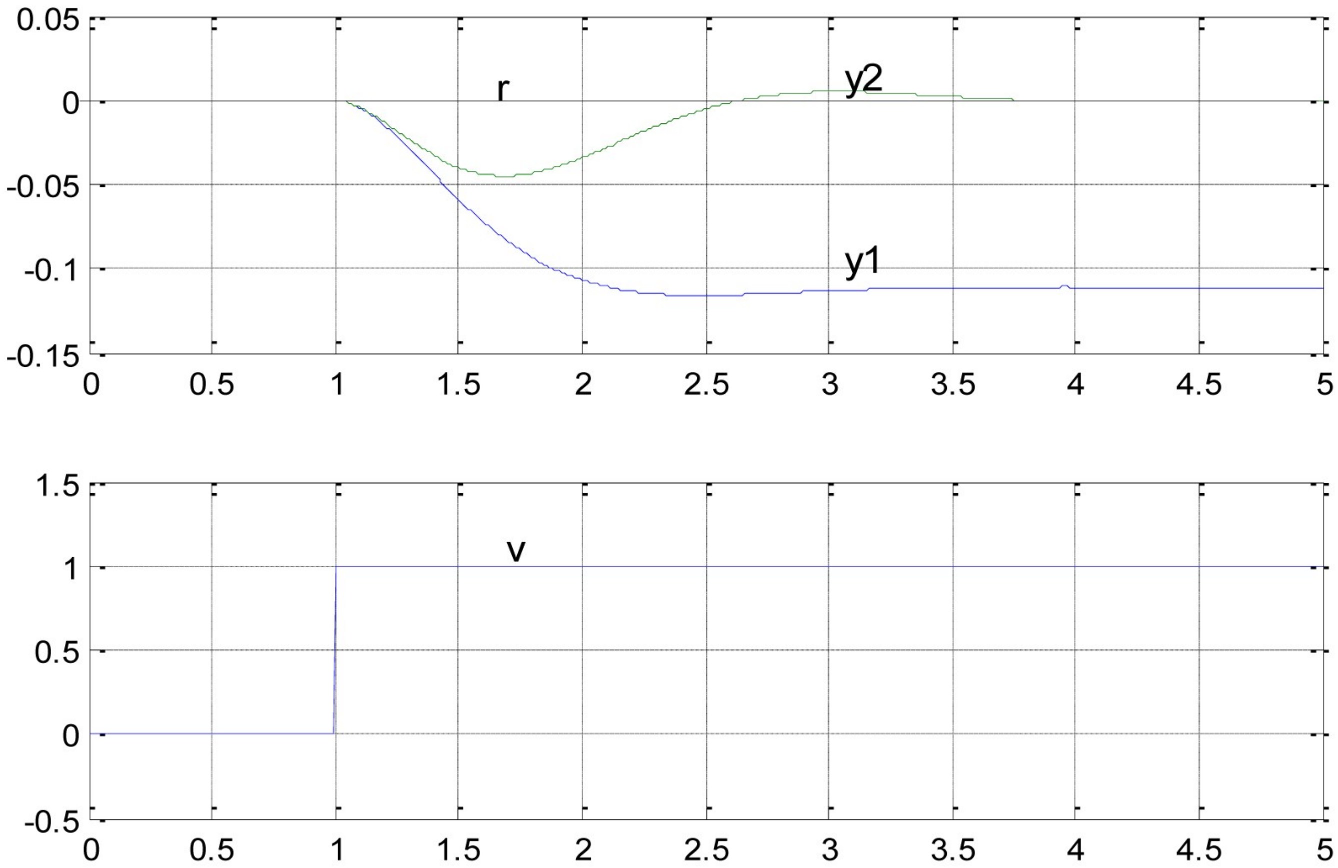
$g_1 = 5$, $g_2 = 18$ og $g_e = -27$

1. Uten integralvirkning:



2. Med integralvirkning:





0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
r
y2
y1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
1.5
1
0.5
0
-0.5
v
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5