Eksempel, poler i transferfunksjonen

$$\dot{x} = \mathrm{A}\mathrm{x} + \mathrm{B}\mathrm{u}$$
$$\mathrm{y} = \mathrm{C}\mathrm{x}$$

Der $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ er tilstander, $\mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ er målinger og $\mathrm{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$ er pådrag.

Dersom ligningene Laplacetransformeres, gir dette:

$$sx = Ax + Bu$$

$$sx - Ax = Bu$$

$$sIx - Ax = [sI - A]\, x = Bu$$

$$x = [sI-A]^{-1}Bu$$

Videre blir:

$$y = Cx = C[sI-A]^{-1}Bu = H(s)\, u$$

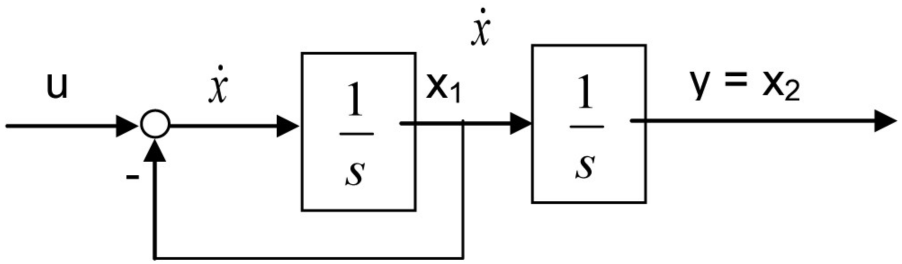
Hvor H(s) er transfermatrisen for systemet. Denne vil ha dimensjon m x r der m er antall målinger og r er antall pådrag:

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1r}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1}(s) & H_{m2}(s) & \dots & H_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

Dersom det er én måling og ett pådrag, m = r = 1, blir H(s) en enkel transferfunksjon.

Eksempel 5.15.1

Gitt et system med blokkdiagram som vist i figur 5.15.1.1.



Figur 5.15.5.1 viser et system med to tilstander og ett pådrag

Transferfunksjonen for dette systemet er:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Dette systemet har to poler: $s_1 = 0$ og $s_2 = -1$

Tilstandsrombeskrivelsen blir:

$\dot{x}_1 = -x_1 + u$
$\dot{x}_2 = x_1$

Innfører x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Dette gir systemet på matriseform:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Videre er:

Videre er:

$y = x_2 = [\ 0 \quad 1\ ]\ x$

Systemmatrisen for systemet blir følgelig:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene = polene for systemet er gitt av: $\det[sI - A] = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s(s+1) = 0$$

Som gir:

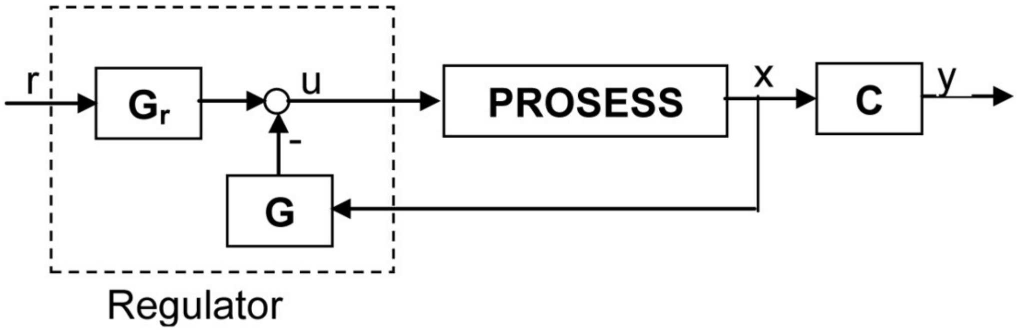
$s_1 = 0$ og $s_2 = -1$ noe som stemmer med tidligere beregninger.

Videre er transferfunksjonen H(s) = C[sI-A]$^{-1}$B:

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Dette stemmer også med tidligere beregninger.

En måte å regulere et multivariabelt system på er å etablere tilbakekoblinger fra alle systemets tilstander til systemets pådrag. Dette er vist i blokkskjemaet i figuren under, der x er en tilstandsvektor bestående av n tilstander, $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $x = [\, x_1 \;\; x_2 \cdots x_n \,]^T$



Figur 5.15.2.1 viser blokkskjema for et system med tilbakekobling fra alle systemeets tilstander

Antar at prosessen kan beskrives med følgende tilstandsrommatrise ligninger:

$\dot{x}$ = Ax + Bu
y = Cx

Reguleringsstrategien ved tilstandstilbakekobling kan beskrives med matriseligningen:

u = G_rr - Gx

Målsettingen med reguleringen er at målingene y skal følge referansene r.

Dersom systemet har m målinger, y = [y_1 y_2 ···· y_m], har systemet også m referanser: r = [r_1 r_2 ···· r_m].

Når uttrykket for u settes inn i ligningen for $\dot{x}$, gir dette:

$$\dot{x} = Ax + B\,[G_r r - Gx]$$
$$\dot{x} = [A-BG]x + BG_r r$$
$$\dot{x} = A_R x + B_R r$$

der $A_R = A - BG$ er systemmatrisen for det tilbakekoblede systemet.

Egenverdiene for denne matrisen blir polene for det tilbakekoblede systemet.

Polplasseringsregulering går ut på å velge verdiene i tilbakekoblingsmatrisen G slik at polene i det tilbakekoblede systemet får en ønsket plassering. Dette fordi polenes plassering er bestemmende for systemets oppførsel, slik som stabilitetsmarginer og responstid.

Verdiene i G_R bestemmes ut fra kravet til at y skal følge r. Et mål er at y svinger seg inn mot referansen r. Med andre ord: stasjonært må y = r.

Den stasjonære sammenhengen mellom y og r finnes ved å sette $\dot{x} = 0$. Dette gir:

$[A-BG]x + BG_r r = 0$

$x = -[A-BG]^{-1} BG_r r$

Og siden $y = Cx$ og $y = -C[A-BG]^{-1} BG_r r$

Skal y = r, må:

$C[A-BG]^{-1} BG_r = -I$

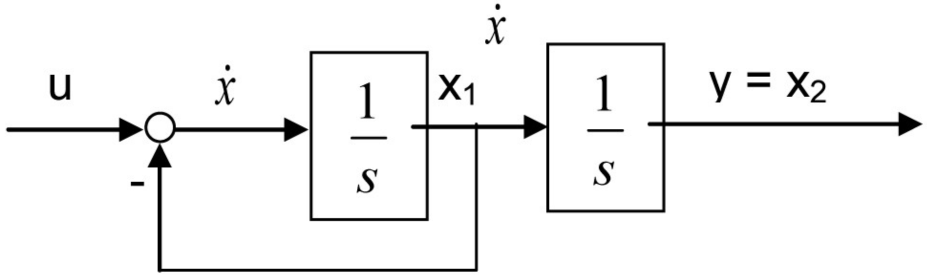
Identitetsmatrisen med dimensjon m x m. Dersom systemet har bare 1 måling, blir:

$C[A-BG]^{-1} BG_r = -1.$

Eksempel 5.15.1:

Eksempel 5.15.1:

Polplasseringsregulering for systemet vist i figur 5.15.2.2.



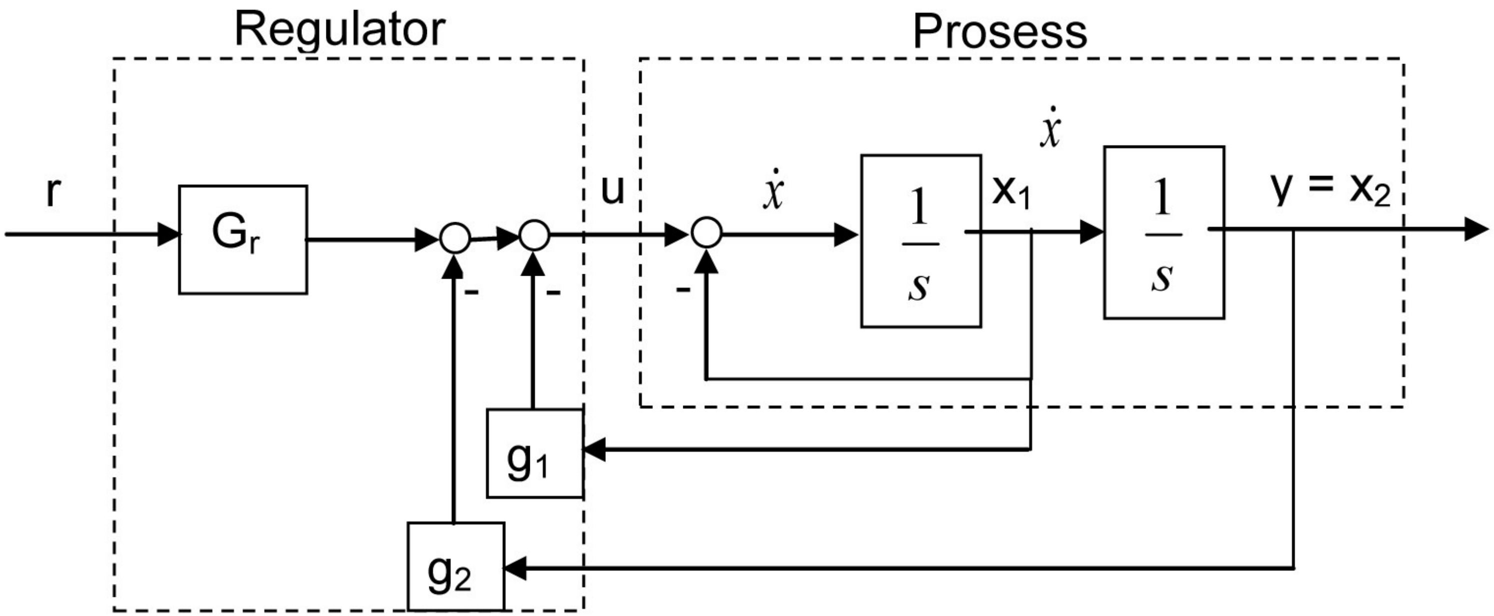
Figur 5.15.2.2 viser et system med to tilstander og et pådrag

A – Systemmatrise

A - Systemmatrise
B - Pådragsmatrise
C - Målematrise

er gitt fra foregående eksempler:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Figur 5.15.2 viser reguleringssystemet med tilbakekoblinger fra begge tilstandene

Matriseligningen for regulatoren blir:

Matriseligningen for regulatoren blir:

$$u = G_r r - Gx = G_r x - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Systemmatrisen for det tilbakekoblede systemet blir:

$$A_R = A - BG = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - g_1 & -g_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Polene for dette systemet finnes av betingelsen:

det [sI – A_R] = 0 :

$$\det\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1-g_1 & -g_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \det\begin{bmatrix} s+1+g_1 & g_2 \\ -1 & s \end{bmatrix} = (s+1+g_1)s + g_2 = 0 :$$

Som gir:

$$s^2 + (g_1+1)s + g_2 = 0$$

Ligningen over kalles også for det tilbakekoblede systemets karakteristiske ligning.

Polyomet $s^2 + (g_1+1)s + g_2$ vil bli nevner i alle transferfunksjoner som settes opp for systemet.

Anta nå at polene skal plasseres slik at det tilbakekoblede systemet får :

resonansfrekvens $\omega_0 = 3$

relativ dempningsfaktor $\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071$

Begrunnelsen for dette valget beskrives senere, men medfører at det tilbakekoblede systemets transferfunksjon kan skrives som:

$$\mathrm{H(s)} = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\varsigma\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1}$$

Polene til dette systemet er gitt av:

$$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\varsigma\frac{s}{\omega_0} + 1 = 0$$

Denne ligningen kan også skrives på normalisert form:

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0{}^2 = 0$$

Med innsatte verdier gir dette:

$$s^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 3s + 9 = 0$$

Sammenlignet med ligningen for det tilbakekoblede systemet:

$$s^2 + (g_1+1)s + g_2 = 0$$

For at det tilbakekoblede systemet skal ha den spesifiserte resonansfrekvens og dempningsfaktor må følgelig:

$$g_1 + 1 = 3\sqrt{2}$$

Dette gir:

$$g_1 = 3\sqrt{2} - 1 = 3.2426$$

Videre gir dette:

$g_2 = 9$

G_R bestemmes som tidligere forklart ved at $y = r$ stasjonært. Dette gir:

$C[A-BG]^{-1} BG_r = 1$

Innsatte verdier gir:

$$[\text{A-BG}]^{-1} = \begin{bmatrix} -1-g_1 & -g_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{g_2}\begin{bmatrix} 0 & g_2 \\ -1 & -1-g_1 \end{bmatrix}$$

$$[\text{A-BG}]^{-1}\text{B} = \frac{1}{g_2}\begin{bmatrix} 0 & g_2 \\ -1 & -1-g_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{g_2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{C}[\text{A-BG}]^{-1}\text{B} = [0\ \ 1]\,\frac{1}{g_2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\ \frac{1}{g_2}$$

$$-\frac{1}{g_2} G_R = -1$$

$G_R = g_2 = 9$

Ved modalregulering, eller tilstandstilbakekobling, bestemmes tilbakekoblingsmatrisen slik at polene i det tilbakekoblede systemet får en ønsket plassering. Problemet blir da å avgjøre hvor polene bør ligge. En metode går ut på å velge ”riktig” dynamisk oppførsel og båndbredde.