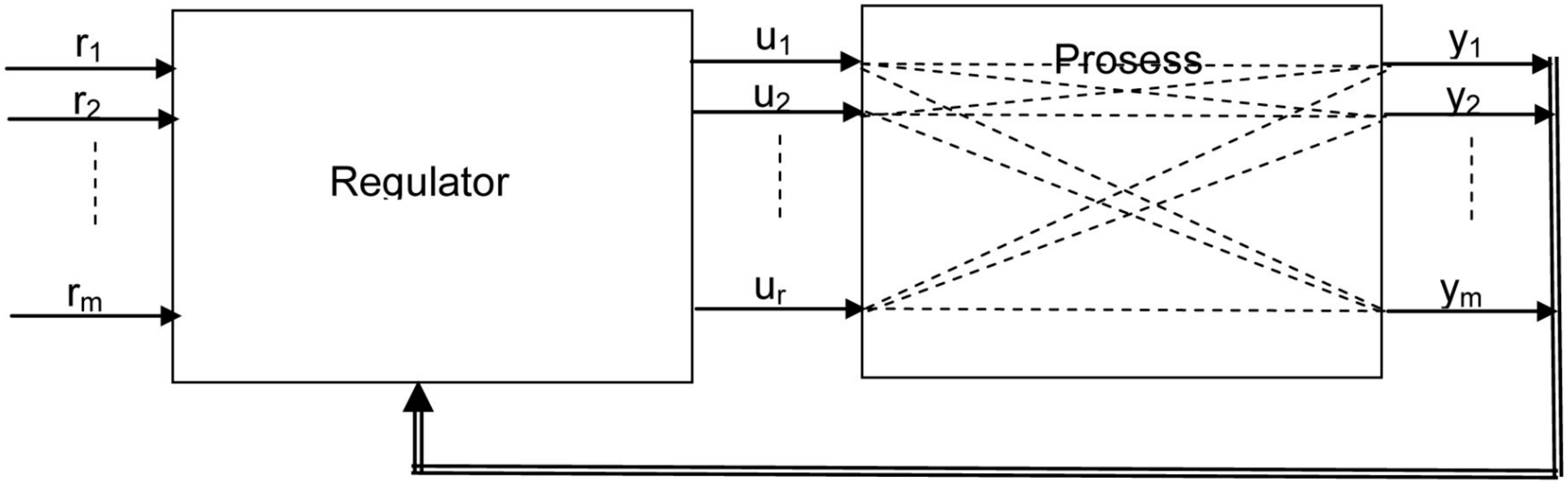
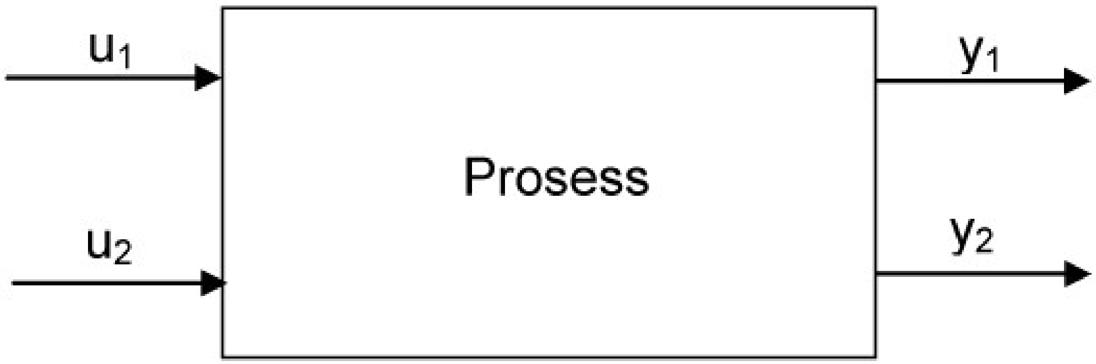


Figur 5.14.1 Typisk multivariabel prosess.

Prosessen kan beskrives med en multivariabel transfermatrise, H(s):

$$\mathrm{H(s)} = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) & \cdots & h_{1r}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) & \cdots & h_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m1}(s) & h_{m2}(s) & \cdots & h_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

Gitt en prosess med to pådrag og to målinger, r = 2 og m=2.



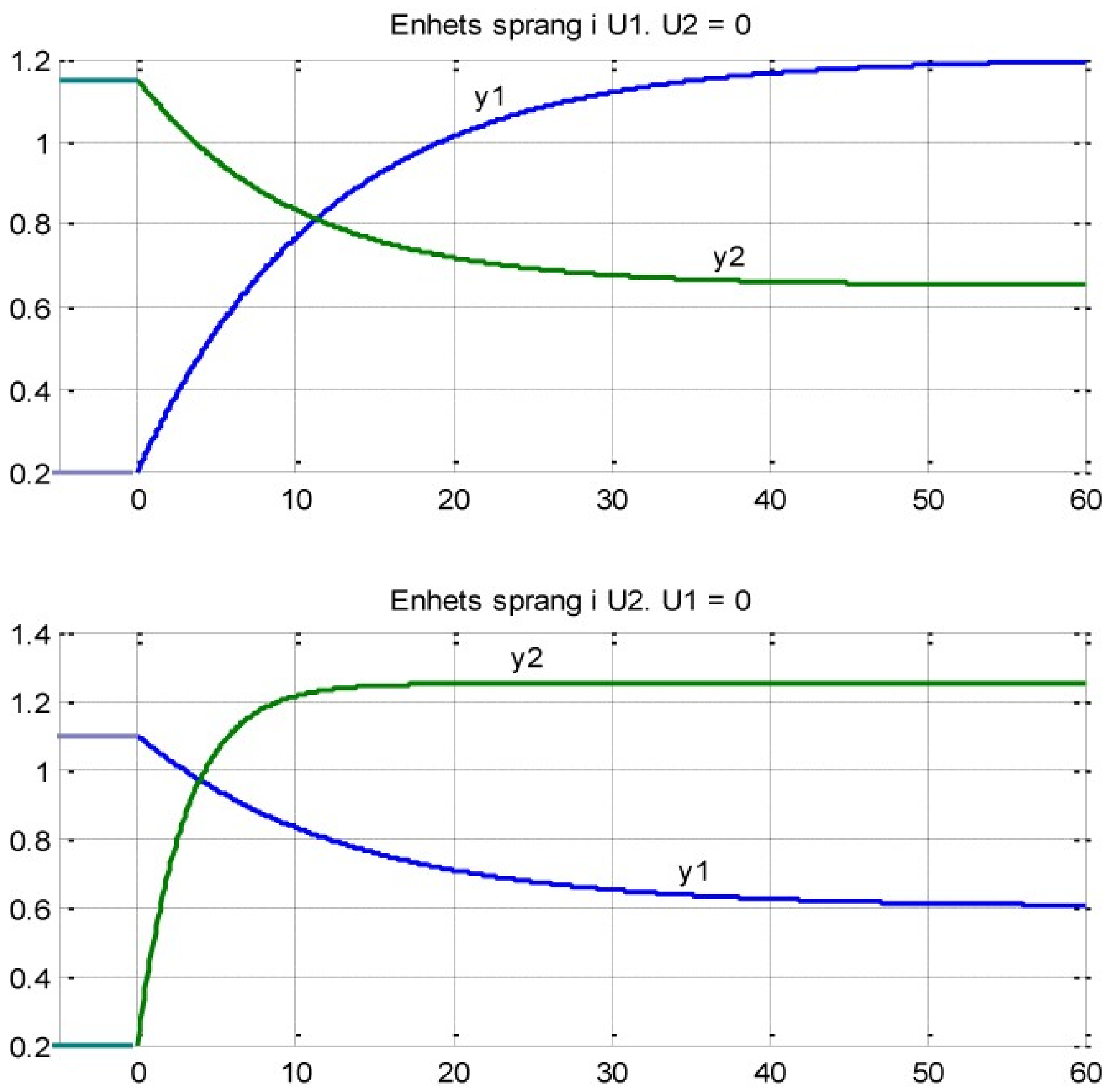
Transfermatrisen for denne prosessen blir:

Transfermatrisen for denne prosessen blir:

$$H(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix}$$

For å finne disse transferfunksjonene kan sprangresponser benyttes på følgende måte:

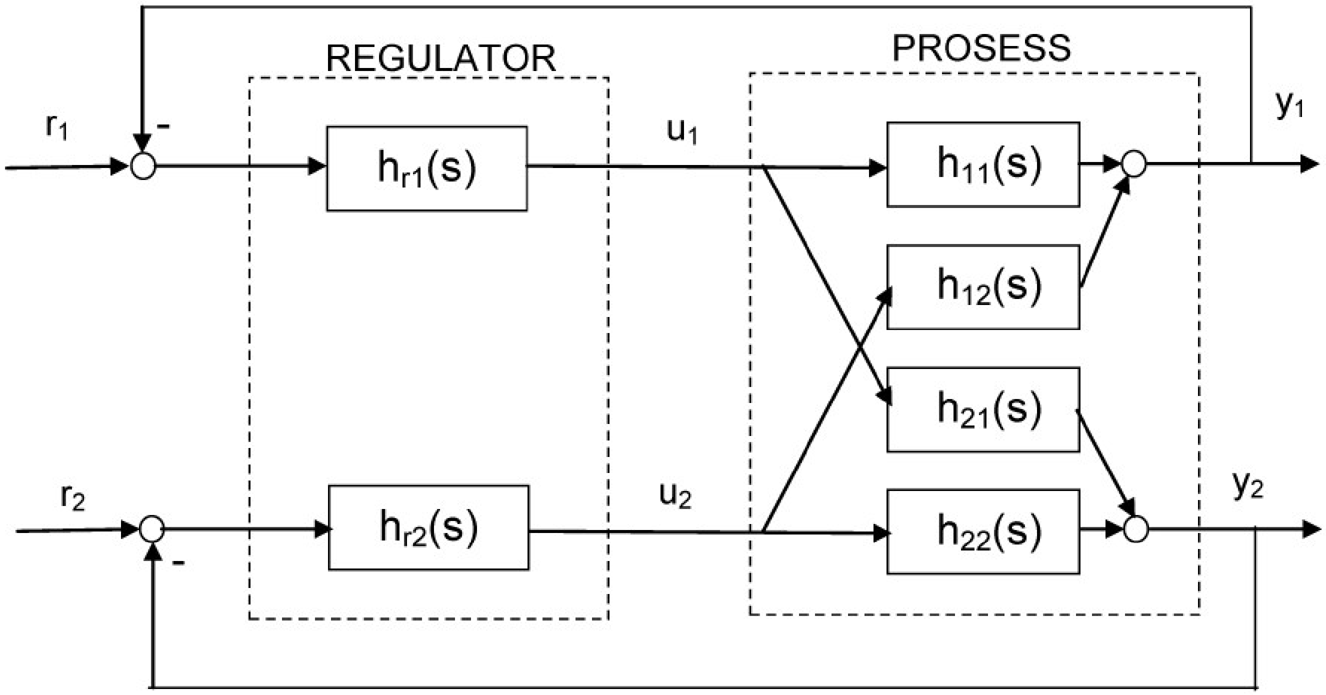
$u_2 = 0$ og u_1 får et enhetssprang. På denne måten finnes $h_{11}(s)$ og $h_{12}(s)$
$u_1 = 0$ og u_2 får et enhetssprang. På denne måten finnes $h_{21}(s)$ og $h_{22}(s)$


Enhets sprang i U1. U2 = 0
y1
y2
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
10
20
30
40
50
60
Enhets sprang i U2. U1 = 0
y2
y1
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
10
20
30
40
50
60

Sprangresponsene viser:

$$h_{11}(s) = \frac{1}{12s+1} \qquad h_{12}(s) = \frac{-0.5}{13s+1}$$

$$h_{21}(s) = \frac{-0.5}{10s+1} \qquad h_{22}(s) = \frac{1.05}{3s+1}$$



Figur 5.14.3 Enkeltsløyfe regulering av eksempel 5.14.1

Analysen går ut på å sette opp en RGA-matrise som viser sammenhengen mellom alle målinger, y_n, og alle pådrag, u_n, vanligvis kalt Λ matrisen:

$$\left.\begin{array}{c|cccc} & u_1 & u_2 & \cdots & u_m \\ \hline y_1 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ y_2 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & & & & \\ y_m & \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mm} \end{array}\right\} \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mm} \end{bmatrix}$$

Den relative forsterkningen defineres slik :

$$\lambda_{ij} = \frac{\mathit{forsterkningen}\ \dfrac{y_i}{u_j}\ \mathit{med\ andre\ sløyfer\ åpne}}{\mathit{forsterkningen}\ \dfrac{y_i}{u_j}\ \mathit{med\ andre\ sløyfer\ lukket}} = \frac{\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)_{u_k = \text{konstant}\ \mathit{for}\ k \neq j}}{\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)_{y_k = \text{konstant}\ \mathit{for}\ k \neq i}}$$

Det finnes imidlertid en formel for å finne RGA-matrisen, Λ:

$$\mathbf{\Lambda = H_S \; x \; (H_S^{-1})^T}$$

NB.: x betyr her elementvis multiplikasjon

H_S er den stasjonære forsterkningsmatrisen

Stasjonær forsterkning finnes av: $H_S = \lim_{s \to 0} H(s)$

1. $\lambda_{ij} < 0$: Åpen- og lukketsløyfeforsterkningen har forskjellig fortegn. Dersom u_j parres med y_i vil denne sløyfen kunne bli ustabil. Bør ikke parres!

2. $\lambda_{ij} = 0$: u_j påvirker ikke y_i når de andre sløyfene er åpne. Bør ikke parres!

3. $\lambda_{ij} = 1$: u_j påvirker y_i like sterkt uavhengig om de andre sløyfene er åpne eller lukket. Dette paret egner seg derfor meget godt for enkeltsløyferegulering.

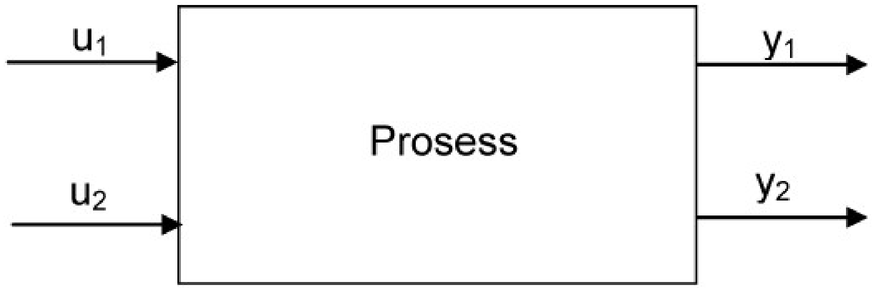
4. $0 < \lambda_{ij} < 1$: u_j påvirker y_i sterkere når de andre sløyfene er lukket enn når de er åpne. Jo mindre $\lambda_{ij} > 0$, dess mindre gunstig blir det å pare u_j og y_i.

5. $\lambda_{ij} > 1$: u_j påvirker y_i svakere når de andre sløyfene er lukket enn når de er åpne. Jo større $\lambda_{ij} > 1$, dess mindre gunstig blir det å pare u_j og y_i.

Hovedregel:

Velg utgang–pådrag-par slik at tilhørende relative forsterkning er positiv og så nær 1 som mulig.

Prosessen kan beskrives med 4 transferfunksjoner:



$$H(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$H_S = \lim_{s \to 0} H(s) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$(H_S^{-1})^T = \frac{1}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} \begin{bmatrix} K_{22} & -K_{21} \\ -K_{12} & K_{11} \end{bmatrix}$$

Beregner : $\lambda_{11} = K_{11} \cdot \dfrac{K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} = \dfrac{K_{11}K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}$.

Siden summen av elementene i en rad og en kolonne skal være 1, blir RGA matrisen :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 1 - \lambda_{11} \\ 1 - \lambda_{11} & \lambda_{11} \end{bmatrix}$$

a)

Anta at den stasjonære forsterkningsmatrisen er: $H_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Av dette følger at: $\lambda_{11} = \dfrac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1 - 1 \cdot 0} = 1$ og $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dette er en perfekt prosess for enkelsløyferegulering med parene $y_1 - u_1$ og $y_2 - u_2$

Dersom stasjonær forsterkningsmatrisen er funnet til å være: $H_S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

Av dette følger at: $\lambda_{11} = \dfrac{0.5 \cdot 0.5}{0.5 \cdot 0.5 - 1 \cdot 0.5}$ = - 1 og $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Her vil det ikke fungere med enkelsløyferegulering med parene $y_1 - u_1$ og $y_2 - u_2$.
Dersom det er ønskelig å benytte enkelsløyferegulering bør parene funnet under eksempel 5.14.2 a): $y_1 - u_2$ og $y_2 - u_1$

Kan prosessen i eksempel 5.13.1 reguleres med enkelsløyferegulering?

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{12s+1} & \dfrac{-0.5}{13s+1} \\ \dfrac{-0.5}{10s+1} & \dfrac{1.05}{3s+1} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \; H_S = H(0) = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1.05 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{11} = \frac{1 \cdot 1.05}{1 \cdot 1.05 - (-0.5) \cdot (-0.5)} = 1.3 \text{ og } \Lambda = \begin{bmatrix} 1.3 & -0.3 \\ -0.3 & 1.3 \end{bmatrix}$$

Det er ikke en helt perfekt løsning, men det bør være mulig å benytte enkeltsløyferegulering med parene
$y_1 - u_1$ og $y_2 - u_2$